

LIMITI DI FUNZIONI REALI 3

TEOREMI SUI LIMITI DELLE FUNZIONI

Teorema dell'unicità del limite

Se $x \rightarrow x_0$ esiste il limite della funzione $f(x)$, tale limite è unico.

Dimostrazione per assurdo

Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[- \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta'_\epsilon > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[- \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \epsilon$

Sia $\delta_\epsilon < \delta'_\epsilon$ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[- \{x_0\} \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - \ell_1| < \epsilon \\ |f(x) - \ell_2| < \epsilon \end{cases}$

Il valore assoluto della differenza di due numeri relativi è \leq della somma dei valori assoluti di tali numeri

$$|[f(x) - \ell_1] - [f(x) - \ell_2]| \leq ||f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2|| < \epsilon + \epsilon$$

$$|\ell_2 - \ell_1| < 2\epsilon! \text{ ASSURDO}$$

Ma ciò è assurdo in quanto ℓ_2 e ℓ_1 sono finiti e diversi l'uno dall'altro e la loro distanza non può essere minore di un numero arbitrariamente scelto $|\ell_2 - \ell_1| < 2\epsilon$.

Teorema della permanenza del segno

Se per $x \rightarrow x_0$ la funzione $f(x)$ tende ad un limite finito ℓ non nullo $\neq 0$, esiste un intorno di x_0 , per ogni x del quale, la funzione $f(x)$ assume valori dello stesso segno del suo limite.

$$\ell \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$$

Per la definizione di limite si può scrivere: $\forall \epsilon > 0 \exists$ un intorno $\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$

o anche $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$

Se scelgo $\epsilon = \frac{|\ell|}{2}$, $\ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2}$

$$1) \ell > 0 \quad \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} \quad \frac{1}{2}\ell < f(x) < \frac{3}{2}\ell \quad \text{quindi positiva}$$

$$2) \ell < 0 \quad \ell + \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell - \frac{\ell}{2} \quad \frac{3}{2}\ell < f(x) < \frac{1}{2}\ell \quad \text{quindi negativa}$$

Criterio del confronto

Siano $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ definite nello stesso intervallo, escluso al più x_0 .

Se per ogni x in questo intervallo risulta $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \Rightarrow$$

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$$

Dimostrazione

$$\forall \epsilon > 0 \exists h_1$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

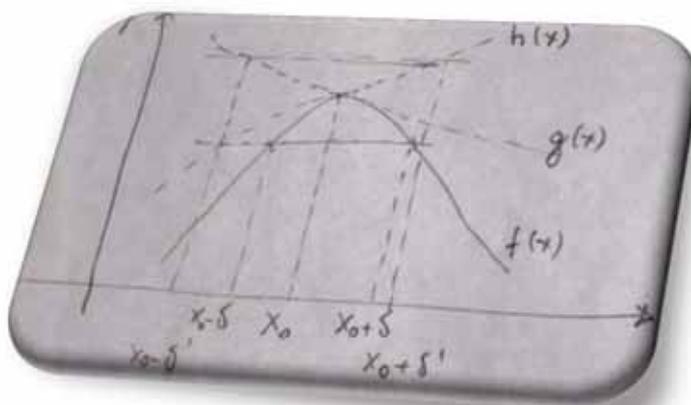
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta'; x_0 + \delta'[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - \ell| < \epsilon$$

$$1) \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

$$2) \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$$

Sia $H_3 = H_1 \cap H_2$; tenendo conto delle precedenti, si può scrivere:

$$\ell - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \epsilon$$



allora

$$\forall \epsilon > 0, \exists h_3 \Rightarrow \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$$

e quindi

$$|h(x) - \ell| < \epsilon$$

cioè il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

Teorema del valore assoluto

Se, al tendere di $x \rightarrow x_0$, la funzione $f(x)$ tende ad un limite finito ℓ , il valore assoluto della $f(x)$ tende al valore assoluto di ℓ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta, [\quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Ma

$$\forall x, \quad ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell|$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \exists' \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta, [\quad \Rightarrow \quad ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad ||f(x)| - |\ell|| < \epsilon$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$$

Corollario

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$$

$$||f(x)| - |\ell|| < \epsilon = \frac{|\ell|}{2}$$

$$|\ell| - \frac{|\ell|}{2} < |f(x)| < |\ell| + \frac{|\ell|}{2}$$

$$\frac{1}{2}|\ell| < |f(x)| < \frac{3}{2}|\ell|$$

Limite della funzione reciproca di una funzione data

Se $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$

$$\text{Allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| \quad \text{ovvero} \quad \frac{|\ell - f(x)|}{|f(x)| |\ell|}$$

Per l'ipotesi $|f(x) - \ell| < \sigma$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$$

$$|\ell| - \epsilon < |f(x)| < |\ell| + \epsilon$$

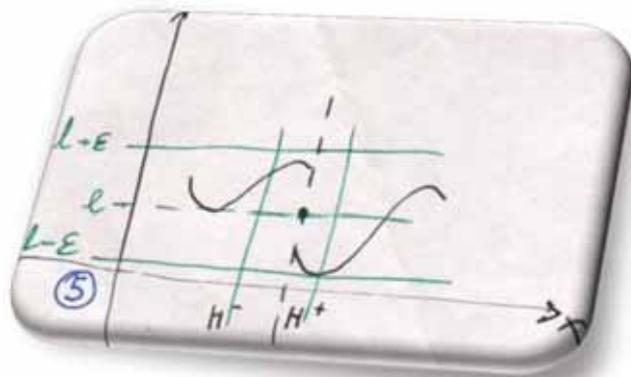
E posso trovare, definito $\epsilon = \frac{|\ell|}{2}$, un conveniente intorno con $\epsilon = \frac{|\ell|}{2}$ in cui risulta:

$$\frac{|\ell|}{2} < |f(x)| < \frac{3}{2}|\ell|$$

$$\Rightarrow \frac{|\ell - f(x)|}{|f(x)| |\ell|} < \frac{\sigma}{\frac{|\ell|}{2} |\ell|} = \frac{2\sigma}{\ell^2} < \epsilon \Rightarrow \exists \text{ un intorno di } x_0 \text{ dipendente da } \sigma \text{ e quindi da } \epsilon .$$

Quindi risulta

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} < \epsilon$$



Il comportamento precedente, anziché in un intorno (completo) di x_0 , può presentarsi in un intorno destro o sinistro di x_0 ; in questo caso l'intervallo di definizione deve essere non limitato (sup.,inf.).