Gennaio

n° 1136 Pag 395 Sull'altezza AH di un triangolo equilatero ABC di lato $2a$, si prenda un punto O e per esso si conducano le parallele ai lati AB e BC: la prima incontri i lati AC, BC nei punti L ed M; l'altra incontri i lati AC, AB nei punti N e P. Si determini O in modo che la somma delle aree del triangolo OLN e del parallelogramma OPBM sia uguale a $\sqrt{3}\,k a^2$. 24

[una sol. $0 \le k < \frac{1}{4}$; due sol. $\frac{1}{4} \le k \le \frac{1}{3}$

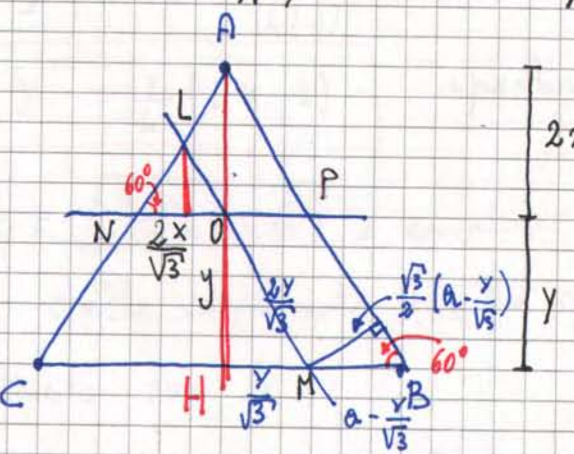
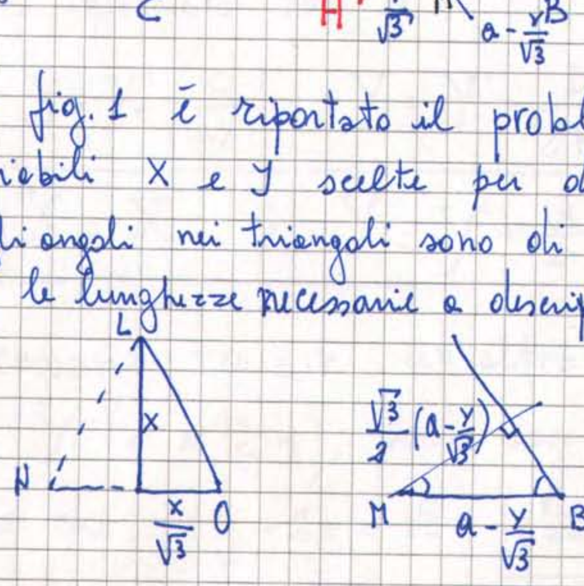


fig. 1

"x" "y" Nella fig. 1 è riportato il problema; sono anche evidenti le variabili x e y scelte per discutere il problema. Poichè gli angoli nei triangoli sono di 30° e 60° rimangono definite le lunghezze necessarie a descrivere il problema:



La relazione del problema diventa:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot x + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\left(a-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\cdot k\cdot a^2\cdot\sqrt{3}$$

(A) $$x^2 - y^2 + \sqrt{3}\,y a - 3 k a^2 = 0$$

con a parametro di costruzione, k parametro di discussione. Introducendo un cambiamento di variabili: $X = \frac{x}{a}$ e $Y = \frac{y}{a}$

(B) $$X^2 - Y^2 + \sqrt{3}\,Y - 3K = 0$$

equazione di una iperbole traslata -

È noto che data l'equazione

$$AX^2 + BY^2 + CX + DY + E = 0$$

con una opportuna traslazione si ottiene:

$$AX'^2 + BY'^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$

$$X'^2 - Y'^2 = 0 + \frac{3}{4(-1)} + 3K$$

(C) $$\boxed{X'^2 - Y'^2 = \frac{3}{4}(4K-1)}$$ iperbole

1ª rel.

con $a = b = \sqrt{\frac{3}{4}(4K-1)}$ e asintoti $y = \pm x$ -

Il passaggio dalle coordinate $(X;Y)$ a quelle $(X';Y')$ è stato effettuato con le:

$$X = X' - \frac{C}{A2} \;;\quad Y = Y' - \frac{D}{2B}$$

(D) $$\boxed{X = X' \;;\quad Y = Y' + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

È necessario trovare un'altra relazione che leghi X e Y (o x e y); dalle osservazioni della fig. 1

(E) si vede che: $y + 2x = \sqrt{3}\,a$ (l'altezza del triangolo)

nei limiti $0 \le y \le \sqrt{3}\,a$ $\Rightarrow$ $\boxed{0 \le X \le \sqrt{3}}$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} \le Y' \le \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$0 \le 2x \le \sqrt{3}\,a$ $\quad$ $\boxed{0 \le X \le \frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{0 \le X' \le \frac{\sqrt{3}}{2}}$

e applicando le trasformazioni delle coordinate (D) nella relazione (E), si ha: $Y' + \frac{\sqrt{3}}{2} = -2X' + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(F) $$Y' = -2X' + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ora è possibile discutere il sistema misto eq. [C], (F) nei limiti trovati:

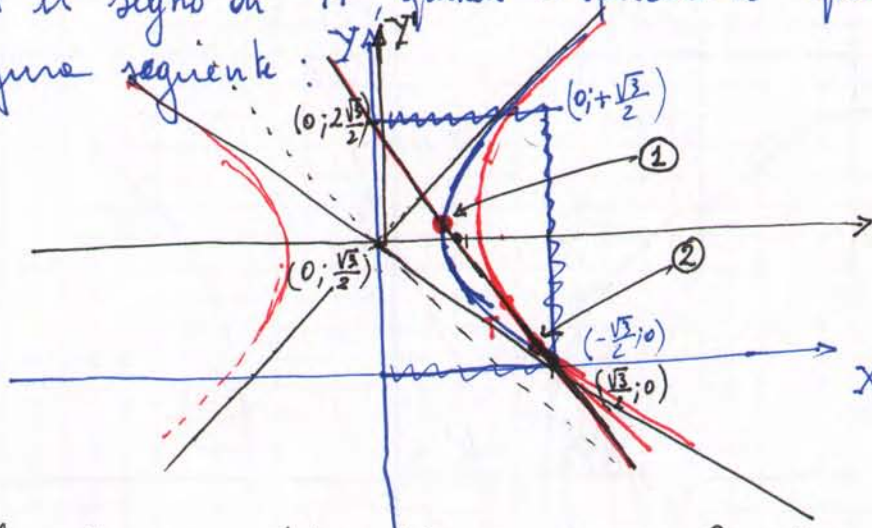
Cerchiamo ora le cond. di tangenza rette, iperbole:

$$X'^2 - Y'^2 = 3k - \frac{3}{4} \; ; \; X'^2 - \left(4X'^2 + \frac{3}{4} - 2\cdot\sqrt{3}X'\right) + \frac{3}{4} - 3k = 0$$

$$3X'^2 - 2\sqrt{3}X' - 3k = 0 \; ; \; X'_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 9k}}{3}$$

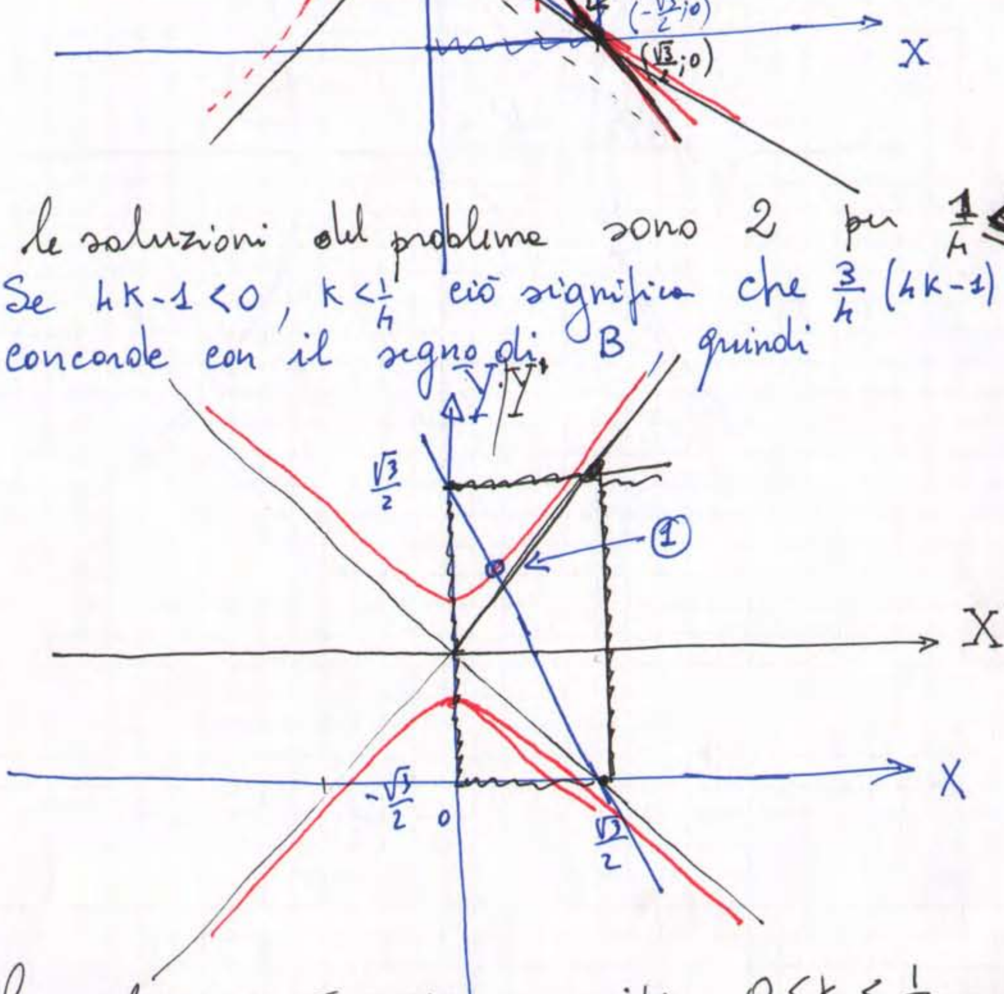
tangenze — cioè $\Delta \geq 0$ per $\boxed{k \leq \frac{1}{3}}$

1° CASO — Se $4k - 1 > 0$, $k > \frac{1}{4}$ ciò significa che $\frac{3}{4}(4k-1)$ è concorde con il segno di A, quindi l'iperbole è quella della figura seguente:



soluz. — le soluzioni del problema sono 2 per $\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{1}{3}$ -

2° CASO — Se $4k - 1 < 0$, $k < \frac{1}{4}$ ciò significa che $\frac{3}{4}(4k-1)$ è concorde con il segno di B, quindi



sol. — la soluzione è unica per $0 < k < \frac{1}{4}$

... nelle (B) utilizzando la (E) 2)

il problema si può discutere nelle incognita "X"

$$X^2-(4X^2+\cancel{3}-4\sqrt{3}X)+\cancel{3}-2\sqrt{3}X=3k$$

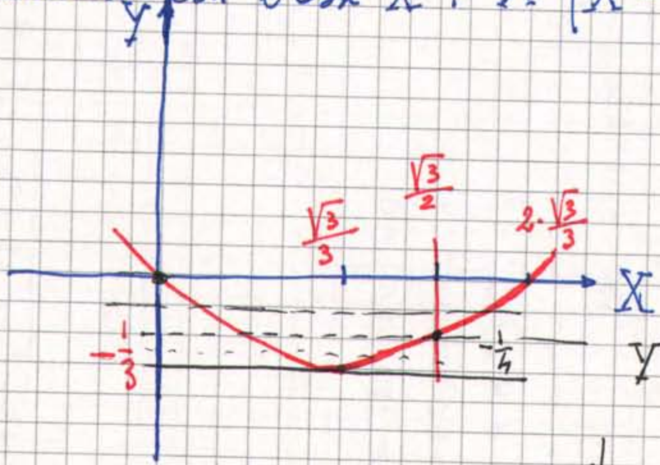
$$X^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}X=-k$$

Introducendo $Y''=-k$ e $Y''=X^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}X$

la discussione del sistema misto diventa lo studio di una parabola che si interseca con una retta:

$$V=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\equiv\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right)$$

intersezione con l'asse X: $X\left(X-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=0$; $X_1=0$; $X_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$$Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{4}$$

due soluzioni $\frac{1}{4}\le k\le\frac{1}{3}$

una soluzione $0\le k<\frac{1}{4}$