1118 In un rettangolo ABCD si ha: $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ Sistema misto

$\overline{AD}=\overline{BC}=2a$; si congiunga un punto P della mediana del rettangolo parallela ai lati maggiori, con i vertici del rettangolo stesso. Essendo M il punto medio del lato AB, si determini P in modo che sia soddisfatta la condizione: $\overline{AB}\cdot\overline{MP}+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=ka^2$.

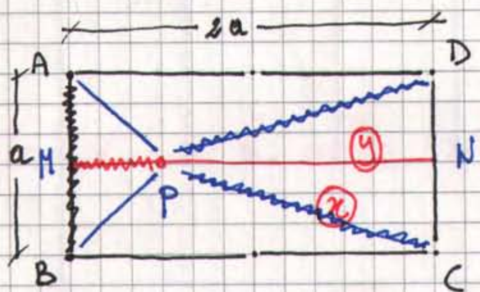


fig. 1

Nella fig. 1 è riportato il problema;
può essere discusso in vari modi, il primo prevede l'uso di due variabili x, y, sebbene possa essere discusso solo con x. Vertice

x e y sono legate dalla relazione:

rel. 1 $$x^2-y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$ Pitagora

mentre la relazione del problema è:

rel. 2 $$a\cdot(2a-y)+2x^2=ka^2$$

limiti Con limiti: $0\le y\le 2a$ $\quad \frac{a}{2}\le x\le \frac{\sqrt{17}}{2}a$ –

La rel. 2 diventa:

$$ay=2x^2+2a^2-ka^2$$

$$\frac{ay}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=2\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+2\frac{a^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-k\frac{a^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad 0\le\frac{y}{(a/2)}\le\frac{2a}{a/2}$$

e la 1 diventa:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1 \quad \text{con} \quad \frac{a/2}{a/2}\le\frac{x}{(a/2)}\le\frac{\sqrt{17}}{2}\frac{a}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Introducendo le nuove coordinate:

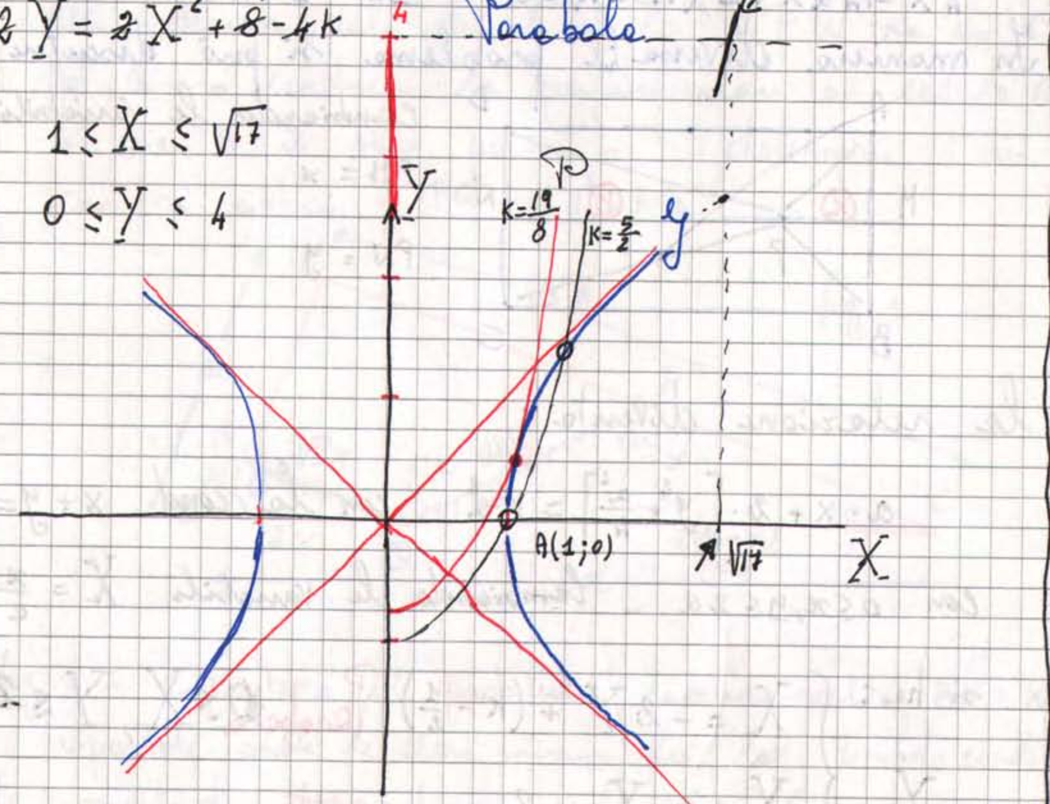
$$X=\frac{x}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$ risulta

$$Y=\frac{y}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

si ottiene il sistema misto:

Sistema misto

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 & \text{Iperbole} \\ \cancel{2}Y = \cancel{2}X^2 + \overset{4}{\cancel{8}} - \overset{2}{\cancel{4}}k & \text{Parabola} \\ 1 \le X \le \sqrt{17} \\ 0 \le Y \le 4 \end{cases}$$



Vertice

La Parabola ha vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(0; 2(2-k)\right)$

Ricerco ora la Parabola tangente all'Iperbole:

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 = Y - 2(2-k) \end{cases} \quad -Y^2 + Y - 2(2-k) = 1 \quad Y^2 - Y + 5 - 2k = 0 \quad \Delta = 1 - 4\cdot(5-2k)$$

$\Delta = 0$ $\boxed{\text{per } k = \frac{19}{8}}$ e $Y_{1,2} = \frac{1}{2}$ e $X_{1,2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

La Parabola passante per $A(1;0)$ è:

$$0 = 1 + 2(2-k)$$
$$0 = 5 - 2k$$
$$\boxed{k = \frac{5}{2}}$$

L'altro limite si trova per $X = \sqrt{17}$ con $Y^2 = X^2 - 1 = 17 - 1 = 16$
$Y = +4$ e imponendo il passaggio della Parabola per $(\sqrt{17}; 4)$
si ha: $4 = 17 + 2(2-k)$ cioè $\boxed{k = \frac{17}{2}}$;

Risultati

2 sol. per $\frac{19}{8} \le k \le \frac{5}{2}$

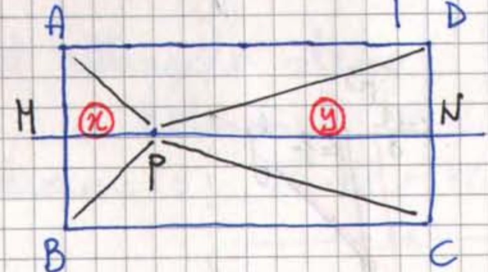
1 sol per $\frac{5}{2} < k \le \frac{17}{2}$

Indicando PM con x si ha:

$$ax+2(2a-x)^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = ka^2$$

$$4x^2-14ax+a^2(17-2k)=0 \quad \text{con} \quad 0\le x\le 2a$$

In maniera diversa il problema si può discutere:



cambiando le variabili

PM = x

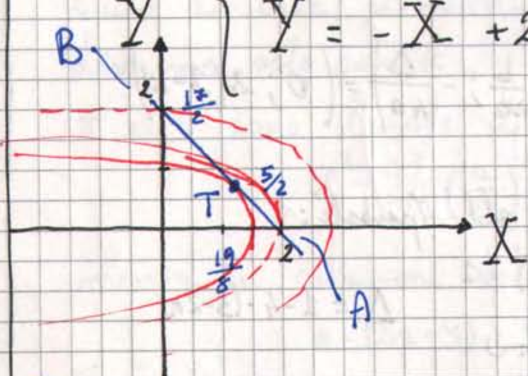
PN = y

la relazione diventa:

$$a\cdot x + 2\cdot\left[y^2+\frac{a^2}{4}\right] = ka^2 \quad \text{con la cond.} \quad x+y=2a$$

con $0\le x,y\le 2a$ – cambiando le variabili $X = \frac{x}{a}$; $Y=\frac{y}{a}$

si ha: $\begin{cases} X = -2Y^2+\left(k-\frac{1}{2}\right) & \text{Parabola} \quad 0\le X, Y\le 2 \\ Y = -X+2 & \text{retta} \end{cases}$



Per trovare A: $2 = -2\cdot 0 + k - \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{5}{2}$

B: $-2\cdot 4 + k - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{2}$

T: $2-y = -2y^2+k-\frac{1}{2}$

$2y^2-y+\frac{5}{2}-k=0 \quad \Delta = 1-4\cdot 2\cdot\left(\frac{5}{2}-k\right)$

$1-8\cdot\frac{5}{2}+8k=0$

$k=\frac{19}{8}$

con risultati noti.