CALCOLO LETTERALE

Le **espressioni letterali** sono espressioni contenenti operazioni fra numeri e lettere: $ab+3c$, $\frac{5x-2}{x+y^2}$.

In generale le lettere rappresentano numeri generici. Ad esempio, se vogliamo convertire in espressione la frase "il doppio di un numero diviso per un altro" potremmo scrivere $\frac{2x}{y}$, dove x e y stanno proprio ad indicare due numeri generici qualunque (reali, se non specificato altrimenti). Viceversa, l'espressione $ab+3c$ si può interpretare come "il prodotto di due numeri sommato al triplo di un altro".

MONOMI E POLINOMI

Le espressioni letterali più semplici sono i **monomi**, che sono pure moltiplicazioni di numeri (reali, quindi anche frazioni o irrazionali) e lettere: ab^2c, $-\frac{2}{3}x^2y$, $\sqrt{3}a^2b^3$ ...

Il **grado di un monomio** è determinato sommando gli esponenti di tutte le lettere. Negli esempi precedenti quindi il grado è 4, 3 e 5, rispettivamente.

Se sommiamo (o sottraiamo) monomi otteniamo i **polinomi**. I monomi sommati (o sottratti) si chiamano anche termini del polinomio. I polinomi a due termini si chiamano anche *binomi* (es: $ab+3c$), quelli a tre termini *trinomi*.

Il **grado di un polinomio** si ottiene prendendo il grado massimo dei termini che lo compongono. Quindi il binomio $ab+3c$ ha grado 2, mentre il trinomio $2x^3y-\frac{4}{5}xy^3+y^4$ ha grado 4.

Un polinomio si dice *omogeneo* quando tutti i termini hanno lo stesso grado (negli esempi precedenti il binomio non è omogeneo mentre il trinomio si).

I polinomi più semplici di tutti sono quelli in cui compare una sola lettera, detta anche *variabile*. Tale unica lettera in generale si indica con la lettera *x*. Il generico **polinomio di grado *n* nella variabile x** sarà quindi del tipo:

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$$

dove si intende che $a_o, a_1, a_2, ..., a_n$ non sono altre variabili ma numeri ben precisi e fissati che dipendono dall'esercizio (es: $3x^4 - 2x^3 + x + 7$ è un polinomio di grado 4 nella variabile x, mancante in questo caso del termine di grado 2).

PRODOTTO E POTENZA DI POLINOMI – PRODOTTI NOTEVOLI

Il prodotto di due polinomi fra loro dà come risultato un altro polinomio (col grado pari alla somma dei gradi dei polinomi di partenza).

Similmente è anche la potenza ad esponente intero positivo di polinomi darà come risultato un polinomio.
In entrambi i casi l'operazione si esegue come per i numeri "normali" (cioè espressioni senza lettere), moltiplicando fra loro i vari termini in tutte le combinazioni possibili (proprietà distributiva della moltiplicazione).

Alcune potenze di polinomi si usano spesso e quindi conviene imparare a memoria il risultato, anche se non è indispensabile, e se uno non se li ricorda può sempre eseguire i calcoli passo-passo. Questi sono detti **prodotti notevoli**:

quadrato di binomio: $(ab - 3c)^2 = a^2b^2 + 9c^2 - 6abc$ (cioè quadrato del primo più quadrato del secondo più doppio prodotto)

somma per differenza: $(2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2$ (cioè quadrato del primo meno quadrato del secondo)

cubo di binomio: $(ab - 3c)^3 = a^3b^3 - 27c^3 - 9a^2b^2c + 27abc^2$ (cioè cubo del primo più cubo del secondo più triplo prodotto del primo al quadrato per il secondo più triplo prodotto del primo per il secondo al quadrato)

quadrato di trinomio: $(ab-3c+2d)^2 = a^2b^2+9c^2+4d^2-6abc+4abd-12cd$ (cioè somma di tutti i quadrati e di tutti i doppi prodotti)

somma/differenza di cubi: $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2+y^2 \mp xy)$ (cioè la somma/differenza di cubi si può scrivere come il prodotto della semplice somma/differenza per quello che si chiama anche *falso quadrato*, cioè la somma dei quadrati sottratta/sommata al semplice prodotto)

FRAZIONI ALGEBRICHE - DIVISIONE DI POLINOMI

La divisione di monomi, e quindi di polinomi, in generale non risulta in polinomi. Quindi un'espressione come $\frac{5x-2}{x+y^2}$ non è un polinomio, ma è detta invece *frazione algebrica*.

Le frazioni algebriche si sommano, sottraggono, moltiplicano e dividono fra loro come fossero frazioni numeriche "normali", cioè calcolando il minimo comune denominatore fra le frazioni, etc.

Per calcolare il minimo comune denominatore fra frazioni algebriche, bisogna saper scomporre i polinomi in prodotto di *fattori primi*, cioè in polinomi di grado inferiore non ulteriormente riscrivibili come prodotto di altri fattori di grado inferiore.

I metodi di scomposizione in fattori primi di polinomi sono:

- raccoglimento a fattor comune: $2x+6x^2 = 2x(1+3x)$
- raccoglimento parziale:

$$2x+6x^2-3y-9xy = 2x(1+3x)-3y(1+3x) = (2x-3y)(1+3x)$$

- riconoscimento di prodotti notevoli: $4x^2-9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$
- Ruffini (vedi sotto)

A volte la divisione di polinomi si può anche eseguire, senza complicare troppo l'espressione finale, ma anzi semplificandola. Eseguire queste divisioni torna utile in alcuni problemi attraverso tutta la matematica, e quindi conviene soffermarcisi. Ci limitiamo al caso di divisione fra polinomi in una variabile.

Divisione in colonna

Si può eseguire la divisione in colonna, ordinando il numeratore e il denominatore in ordine decrescente di grado e dividendo il termine di grado massimo nel numeratore per il termine di grado massimo del denominatore e calcolando il resto. Poi dividendo il termine di grado massimo del resto ancora per il termine di grado massimo del denominatore e calcolando il nuovo resto, etc.

Divisione con il metodo di Ruffini

Nel caso semplice di divisione di un polinomio $P(x)$ per binomi di primo grado del tipo $(x-k)$ cioè con la x avente coefficiente strettamente 1 e con k un numero fissato qualunque, si può semplificare il calcolo del quoziente e del resto usando lo **schema di Ruffini**:

1. Si scrivono in riga i coefficienti dei vari termini ordinati per potenza decrescente, scrivendo 0 per i termini mancanti e lasciando una seconda riga vuota.
2. Poi si somma il primo coefficiente con quello sottostante (per il primo posto è sempre 0) e si scrive il risultato in una terza riga in basso.
3. Quindi si moltiplica questo numero nella terza riga per k e si scrive il risultato nella seconda riga, al secondo posto.
4. Poi si somma il secondo coefficiente nella prima riga con questo secondo coefficiente nella seconda riga e si scrive il risultato nella terza al secondo posto.
5. Si moltiplica questo per k e si scrive il risultato nella seconda riga al terzo posto e così via fino ad arrivare a completare la terza riga.
6. Il quoziente della divisione sarà infine un polinomio $Q(x)$ di grado ridotto di uno rispetto a $P(x)$ con i coefficienti dati, in ordine decrescente di grado, proprio dai coefficienti della terza riga scritta. L'ultimo di questi coefficienti sarà il resto R.

Teorema del resto

Si noti che in questi casi si poteva anticipare il valore del resto calcolando quanto veniva il numeratore se al posto della *x* si metteva *k*, cioè **R = P(k).**

Questo risultato è utile per decidere se un polinomio P(x) è divisibile o meno (cioè Resto=0) per un binomio del tipo $(x-k)$ con k opportuno: basta trovare un k tale che P(k)=0.

La regola da seguire è provare come k qualunque divisore intero positivo o negativo del termine noto del polinomio P(x).

Esempio

Per il polinomio $P(x)=x^3-x^2-x+10$ dovremmo provare a calcolare *P(k)* con $k=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$.

Arrivati a provare $k=-2$ notiamo che *P(-2)=0* e quindi ci fermiamo e concludiamo che *P(x)* è divisibile quindi per $(x+2)$ con resto appunto zero.

Quindi si può scomporre *P(x)* come il prodotto di $(x+2)$ per il quoziente della divisione che avremo cura di calcolare con lo schema di Ruffini descritto sopra (o col metodo più generale della divisione in colonna descritta ancora prima).

E' questo il metodo di **scomposizione di Ruffini**.

Osservazione

Si faccia attenzione che non è un metodo infallibile, in quanto è possibile che un certo polinomio *P(x)* sia divisibile per $\left(x+\frac{3}{4}\right)$ e col metodo descritto sopra non lo sapremo mai (falliremmo quindi a scomporre il polinomio) perchè $\frac{3}{4}$ non è un intero e non avremmo quindi mai scoperto che $P\left(\frac{3}{4}\right)=0$.