Modelli matematici e ricerca operativa

Obiettivi

- formalizzare un problema costruendone il modello matematico
- comprendere il concetto di funzione obiettivo
- saper determinare la soluzione ottimale di un problema

1. Problemi e modelli

1.1 Costruire un modello: le fasi operative

A partire dal primo biennio e continuando poi nel secondo, si è più volte sottolineata l'importanza che ha il saper costruire un modello adeguato a rappresentare una situazione problematica. In questo capitolo vogliamo riprendere e approfondire questo argomento mostrando come le conoscenze matematiche acquisite finora consentano di trovare le soluzioni ottimali di un problema.
In particolare, è la **Ricerca Operativa** (di seguito abbreviata in RO), disciplina di recente sviluppo (le sue origini risalgono alla prima metà del secolo scorso), che si occupa di applicare il metodo scientifico alla soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale; sostanzialmente si tratta di applicare i metodi della matematica che permettono di giungere alle scelte migliori per gestire nel modo più efficiente possibile situazioni complesse, quali per esempio la gestione dei sistemi di produzione e d'impresa.

Qualunque sia la sua natura, la risoluzione di un problema di RO passa attraverso alcune fasi che possiamo così sintetizzare.

Fase 1: **Individuazione del problema da risolvere e raccolta di tutte le informazioni ad esso inerenti.**

In questa fase si individuano le variabili coinvolte e tutte le condizioni a cui esse devono sottostare. In particolare, occorre individuare le **variabili controllabili**, dette anche **variabili di azione**, cioè quelle variabili il cui comportamento è noto e quindi quantificabile, e quelle **non controllabili**, cioè quelle variabili di cui non è possibile prevedere il comportamento se non in termini probabilistici, ma che influiscono sui possibili esiti della situazione in esame.
Ad esempio, in un problema di ottimizzazione della produzione, le variabili controllabili sono relative al rendimento dei macchinari e alla produttività degli

operai, le variabili non controllabili sono gli eventuali guasti ai macchinari o le eventuali malattie dei dipendenti.

Fase 2: **Costruzione del modello matematico che riassuma le caratteristiche del problema.**

Di solito, il modello cui si perviene dopo l'analisi del problema e l'individuazione delle variabili è espresso tramite una funzione che, per il ruolo che svolge, prende il nome di **funzione obiettivo**.

Le variabili della funzione obiettivo sono poi soggette a dei **vincoli** esprimibili mediante equazioni o disequazioni nelle variabili controllabili x_i; ad esempio vincoli di non negatività, detti anche **vincoli di segno**, che esprimono che le quantità coinvolte non possono assumere valori negativi, oppure **vincoli tecnici**, che esprimono ad esempio che in un processo produttivo possono intervenire quantità limitate di una certa materia prima.

In dipendenza dal tipo di problema e dal tipo di vincoli, le variabili possono poi assumere valori di tipo discreto (numero di oggetti prodotti, numero di dipendenti, numero di processi produttivi fra cui scegliere), o di tipo continuo (tempo di esecuzione di una operazione, quantità di merce da trasportare); vedremo che i metodi di risoluzione del problema possono essere diversi nei due casi.

Fase 3: **Analisi del modello matematico ed individuazione della soluzione ottimale.**

La soluzione ottimale, individuata mediante i metodi della matematica è quella che rende massima (o minima a seconda dei casi) la funzione obiettivo.

Fase 4: **Analisi dei risultati.**

La funzione obiettivo e l'insieme dei vincoli costituiscono solo un modello del problema e la soluzione trovata è ottimale solo per quel particolare modello. Esiste quindi sempre uno scarto tra quello che si è costruito con un insieme di equazioni e di formule e la situazione reale che queste relazioni rappresentano; una volta trovata la soluzione si rende perciò necessario procedere alla sua verifica in modo da provvedere ad un eventuale aggiustamento del modello così da renderlo più aderente alla situazione che rappresenta.

Va sottolineato che i punti elencati non sono da considerarsi strettamente sequenziali in quanto in un processo decisionale reale si deve continuamente aggiornare la situazione modificando il modello in base alle informazioni aggiuntive.

1.2 Le tipologie dei problemi

Nei prossimi paragrafi ci occuperemo per primo di *problemi di scelta* nelle diverse forme in cui si possono presentare, distinguendo tra problemi in condizioni di certezza e problemi in condizioni di incertezza.

Problemi di scelta in *condizioni di certezza* si riferiscono a situazioni in cui le conseguenze di un'azione sono determinabili a priori; per esempio quando si deve scegliere tra due o più preventivi per l'esecuzione di una lavorazione.

Ci si trova invece in *condizioni di incertezza* quando una o più variabili del problema sono variabili aleatorie delle quali si possono conoscere solo i valori di probabilità; per esempio decidere la quantità di un bene da produrre si può valutare solo sulla base di indagini di mercato e di previsioni di vendita.

Subito dopo prenderemo in considerazione problemi di *programmazione lineare* in cui sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono espressi da relazioni di tipo lineare.

2. Problemi di scelta in condizioni di certezza

2.1 Il caso continuo

Supponiamo dapprima che la variabile x possa assumere un qualsiasi valore reale; in questa ipotesi possiamo lavorare con le funzioni reali di variabile reale, rappresentarle in un diagramma cartesiano e, dalla loro analisi, dedurre quali possono essere le scelte ottimali.
Vediamo alcuni esempi che riassumono i casi più significativi.

Problema di massimo con funzione obiettivo lineare: $y = mx + q$.

Una azienda che produce stoffe ha un costo giornaliero di € 3000 per ogni telaio, al quale va aggiunta una spesa per la materia prima di € 4 per ogni metro prodotto; la stoffa viene poi rivenduta a € 5,20 al metro. Qual è la produzione giornaliera che consente il massimo profitto, supponendo che tutta la produzione venga venduta, se la capacità produttiva di ogni impianto non può superare i 15000 m ogni giorno?

La variabile d'azione è la produzione giornaliera di ogni telaio che può essere rappresentata da un numero reale non negativo; indichiamo dunque con x il numero di metri di tessuto prodotto da un telaio, con $x \geq 0$.
La funzione obiettivo è la funzione profitto e di essa dobbiamo trovare il punto di massimo.
Dai dati del problema possiamo ricavare le seguenti funzioni:

Funzione dei costi: $C(x) = 3000 + 4x$

Funzione ricavo: $R(x) = 5{,}2x$

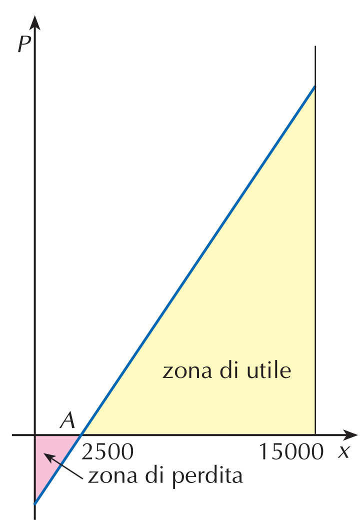
Funzione profitto: $P(x) = 5{,}2x - 3000 - 4x = 1{,}2x - 3000$

Vincoli: $0 \leq x \leq 15000$

Il modello matematico del problema diventa dunque

$$\begin{cases} P(x) = 1{,}2x - 3000 & \text{da massimizzare} \\ 0 \leq x \leq 15000 & \text{vincolo per la variabile d'azione} \end{cases}$$

Figura 1



La funzione obiettivo è una retta il cui grafico è in ***figura 1***; il massimo profitto si ha nel punto di massima produzione, cioè per $x = 15000$; non è conveniente produrre meno di 2500 m di stoffa perché si andrebbe in perdita.

Problema di massimo con funzione obiettivo quadratica: $y = ax^2 + bx + c$.

Un'impresa acquista e rivende della merce senza eseguire lavorazioni. Il prezzo di acquisto è in funzione della quantità acquistata x, in quintali, ed è pari a € 52,80 al quintale diminuito di un importo pari, in euro, allo 0,05% del peso della merce acquistata. Il prezzo di vendita è fisso ed è di € 72 al quintale. I costi di gestione sostenuti sono quantificabili in € 12000 fissi mensili cui vanno aggiunti costi di distribuzione pari, in euro, allo 0,2% del quadrato delle quantità vendute. Determiniamo la quantità x di merce che determina il massimo profitto mensile supponendo che non vi siano quantità rimaste invendute e che le possibilità di acquisto siano:

a. illimitate

b. non superiori a 10000 quintali

c. non superiori a 5000 quintali.

La variabile d'azione x è la quantità, in quintali, di merce acquistata ed è quindi rappresentata da un numero reale non negativo (vincolo di segno). La funzione obiettivo è il profitto e di essa dobbiamo trovare il valore massimo.

Funzione dei costi: $C(x) = (52{,}8 - 0{,}0005x)x + 12000 + 0{,}002x^2 = 0{,}0015x^2 + 52{,}8x + 12000$

Funzione ricavo: $R(x) = 72x$

Funzione profitto: $P(x) = 72x - 0{,}0015x^2 - 52{,}8x - 12000 = -0{,}0015x^2 + 19{,}2x - 12000$

Vincoli nei vari casi: **a.** $x \geq 0$

b. $0 \leq x \leq 10000$

c. $0 \leq x \leq 5000$

Dobbiamo quindi massimizzare la funzione P quando questa è soggetta ai vincoli **a.**, oppure **b.**, oppure **c.**.

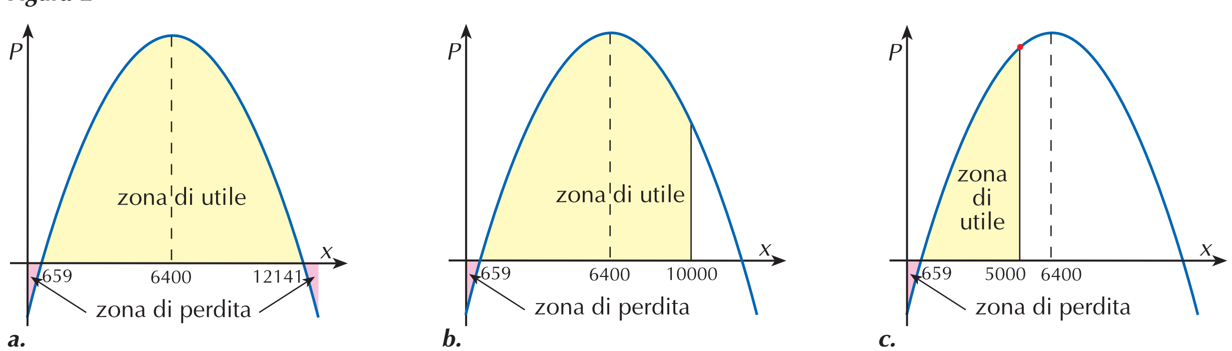
La funzione obiettivo è una parabola con la concavità rivolta verso il basso ed il suo vertice V rappresenta il punto di massimo (***figura 2a***). L'analisi del modello ci porta ad affermare che, indipendentemente dai vincoli, non conviene acquistare e rivendere meno di 659 quintali (valore arrotondato) e più di 12141 quintali (valore arrotondato) perché per $x < 659$ e $x > 12141$ i costi superano i ricavi e si lavorerebbe in perdita. Quindi, poiché si ha che $V(6400, 49440)$, il profitto massimo si ha in corrispondenza di:

a. 6400 quintali di merce acquistata, che corrisponde ad un profitto massimo di € 49440;

b. ancora 6400 quintali di merce (***figura 2b***);

c. 5000 quintali di merce, che corrisponde ad un profitto massimo di € 46500 (***figura 2c***).

Figura 2



Problema di minimo con funzione obiettivo più complessa

Un'azienda che lavora materia prima sostiene, per la sua produzione giornaliera, dei costi complessivi composti da € 1812 di spese fisse e, in euro,

$0{,}7 + 0{,}0004x$ per ogni quintale di materia prima lavorata dove x indica il numero di quintali. Vogliamo determinare la produzione giornaliera che consente di ridurre al minimo il costo medio di produzione nei seguenti casi:

a. produzione massima giornaliera di 1500q

b. produzione massima giornaliera di 3000q.

In questo caso la funzione obiettivo è la funzione del costo medio che, questa volta, va minimizzata.
Il costo medio (o costo unitario) è il rapporto fra il costo totale e la quantità prodotta e si ha che:

la funzione del costo totale è: $C(x) = 1812 + (0{,}7 + 0{,}0004x)x = 0{,}0004x^2 + 0{,}7x + 1812$

la funzione del costo medio è: $C_m(x) = \dfrac{0{,}0004x^2 + 0{,}7x + 1812}{x}$

i vincoli sono: **a.** $0 < x \leq 1500$

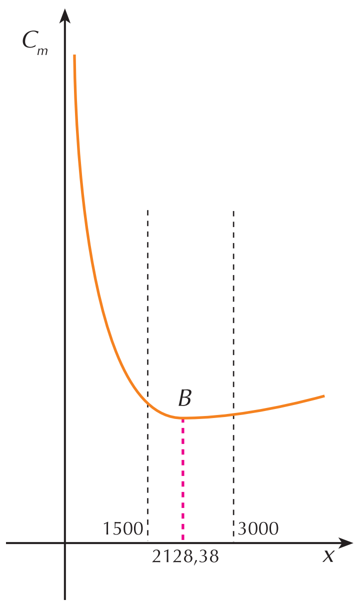
b. $0 < x \leq 3000$

Per trovare i punti di minimo relativi della funzione C_m ricorriamo all'analisi e calcoliamo la derivata prima della funzione obiettivo

$$C'_m(x) = \frac{0{,}0004x^2 - 1812}{x^2}$$

Essa si annulla in $x = \pm 100\sqrt{453} \approx \pm 2128{,}38$ e, dal segno della derivata prima e considerando che deve essere $x > 0$, deduciamo che vi è un punto di minimo in $x = 100\sqrt{453} \approx 2128{,}38$ (***figura 3***).
Se teniamo conto del vincolo **a.** che esclude il minimo trovato, il minor costo unitario si ha in corrispondenza dell'estremo destro cioè in $x = 1500$ ed è $C_m(1500) \approx 2{,}51(€)$.
Se teniamo conto del vincolo **b.**, il punto di minimo assoluto coincide con quello di minimo relativo ed è $C_m\left(100\sqrt{453}\right) \approx 2{,}40(€)$.

Figura 3



Problema di massimo con funzione obiettivo definita da più leggi

1. Una industria, per la produzione di un certo liquore, sostiene un costo di € 2,48 al litro e una spesa fissa settimanale, indipendente dalla quantità prodotta, di € 1600. La produzione viene ceduta ad alcuni concessionari che la pagano:

€ 4 per quantità fino a 1000 litri compresi;

€ 3,80 per quantità variabili tra i 1000 ed i 2000 litri inclusi;

€ 3,60 per quantità variabili tra i 2000 ed i 3000 litri inclusi.

Cerchiamo la quantità più conveniente da produrre e vendere per avere il massimo profitto tendo conto di una produzione massima di 3000 litri.

Siamo di nuovo in presenza di una funzione profitto di cui dobbiamo trovare il punto di massimo. Questa volta però la funzione obiettivo è una funzione definita a tratti, cioè, indicato con x il numero di litri prodotti e venduti, assume differenti espressioni a seconda dell'intervallo cui x appartiene.
Calcoliamo innanzi tutto la funzione costo: $C(x) = 1600 + 2{,}48x$

La funzione ricavo è data da: $\quad R(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ 3{,}8x & \text{se } 1000 < x \leq 2000 \\ 3{,}6x & \text{se } 2000 < x \leq 3000 \end{cases}$

La funzione profitto conseguentemente è $\quad P(x) = \begin{cases} 1{,}52x - 1600 & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ 1{,}32x - 1600 & \text{se } 1000 < x \leq 2000 \\ 1{,}12x - 1600 & \text{se } 2000 < x \leq 3000 \end{cases}$

Il vincolo di produzione è: $\quad 0 \leq x \leq 3000$

Il grafico della funzione $P(x)$ è in ***figura 4***. Osserviamo che in $x = 1000$ e in $x = 2000$ la funzione presenta delle discontinuità di prima specie, e che in tutti gli intervalli considerati la funzione è un tratto di retta crescente. Si ha profitto per una produzione superiore ai 1212 litri (valore approssimato ottenuto risolvendo l'equazione $1{,}32x - 1600 = 0$ calcolato sul secondo tratto di curva); il profitto è massimo in uno degli estremi destri degli intervalli di variabilità di x e poiché

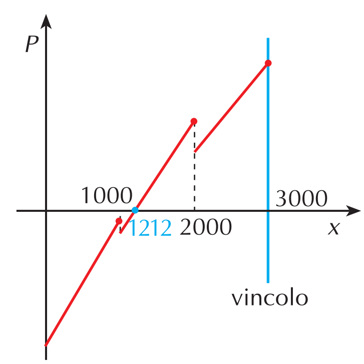
$P(1000) = -80$

$P(2000) = 1040$

$P(3000) = 1760$

si ha il massimo profitto per una produzione e vendita di 3000 litri.

Figura 4



2. Un'azienda commerciale è concessionaria esclusiva per la vendita di un determinato solvente chimico sul quale vengono pagate delle provvigioni che variano a seconda della quantità venduta secondo il seguente schema:

€ 6,20 per ogni unità venduta fino a un massimo di 5000hl

€ 7,40 per ogni unità venduta per quantità comprese fra 5000 e 8000hl

€ 8 per ogni unità venduta per quantità oltre gli 8000hl.

Le spese che l'azienda deve sostenere sono quantificabili in € 8000 fissi e spese variabili unitarie date dalla relazione $2 + 0{,}0003x$, dove x indica la quantità prodotta e venduta.
Vogliamo determinare qual è la quantità ottimale di vendita per ottenere il massimo profitto se si stima che non sia possibile vendere più di 12000hl.

Anche in questo caso dobbiamo massimizzare il profitto.

La funzione dei costi è: $\quad C(x) = 8000 + (2 + 0{,}0003x)x = 0{,}0003x^2 + 2x + 8000$

La funzione ricavo è: $\quad R(x) = \begin{cases} 6{,}2x & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ 7{,}4x & \text{se } 5000 < x \leq 8000 \\ 8x & \text{se } 8000 < x \leq 12000 \end{cases}$

La funzione obiettivo è $\quad P(x) = \begin{cases} -0{,}0003x^2 + 4{,}2x - 8000 & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ -0{,}0003x^2 + 5{,}4x - 8000 & \text{se } 5000 < x \leq 8000 \\ -0{,}0003x^2 + 6x - 8000 & \text{se } 8000 < x \leq 12000 \end{cases}$

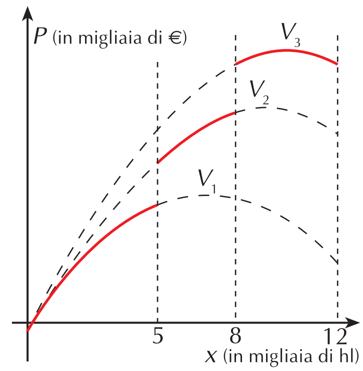
Vincolo: $\quad 0 \leq x \leq 12000$

La funzione P è rappresentata graficamente da tre archi di parabola di vertici rispettivamente

$V_1 = (7000, 6700) \qquad V_2 = (9000, 16300) \qquad V_3 = (10000, 22000)$

Osserviamo che in $x = 5000$ e $x = 8000$ la funzione presenta dei punti di discontinuità di prima specie (in ***figura 5*** la funzione è quella rappresentata in rosso). Il massimo profitto si avrà dunque nel vertice della terza parabola, in corrispondenza di una vendita di 10000hl; il profitto massimo corrispondente è di € 22000.

Figura 5



2.2 Il caso discreto

In molte situazioni la variabile d'azione x può assumere solo valori interi; per esempio x può rappresentare il numero di scatole di cioccolatini prodotte da un'industria dolciaria o il numero di magliette prodotte da un'azienda di confezioni. In questi casi ci si comporta in modo diverso a seconda della quantità di dati a disposizione.

Dati poco numerosi

Se i dati a cui fare riferimento sono poco numerosi, possiamo fare una analisi diretta calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi e confrontando i risultati ottenuti. Osserva il seguente esempio.

Una azienda deve lanciare un nuovo prodotto sul mercato e decide di affidare la campagna pubblicitaria a degli spot televisivi che vadano in onda ogni giorno per 8 settimane consecutive. La società televisiva presenta il preventivo in cui sono previsti € 40 000 di spese fisse cui vanno aggiunti:

- € 600 per ogni spot trasmesso durante la giornata fino ad un massimo di 3 spot giornalieri
- € 500 per ogni spot trasmesso in giornata se questi variano fra 4 e 6.

L'azienda prevede che durante queste 8 settimane il ricavo ottenuto dalla vendita del prodotto in seguito alla pubblicità varierà secondo la seguente tabella

numero spot giornalieri	1	2	3	4	5	6
ricavo in migliaia di euro	70	100	180	240	250	260

Cerchiamo di capire qual è la frequenza degli spot che darà il massimo profitto all'azienda.

Stabiliamo innanzi tutto i costi che l'azienda deve sostenere nei vari casi:

- per 1 spot al giorno abbiamo un costo di $40000 + 600 \cdot \underbrace{7}_{\text{gg. settimana}} \cdot \underbrace{8}_{\text{n. settimane}} = 73600\,(€)$
- per 2 spot al giorno il costo è $40000 + 1200 \cdot 7 \cdot 8 = 107200\,(€)$
- per 3 spot al giorno il costo è $40000 + 1800 \cdot 7 \cdot 8 = 140800\,(€)$
- per 4 spot al giorno il costo è $40000 + 2000 \cdot 7 \cdot 8 = 152000\,(€)$
- per 5 spot al giorno il costo è $40000 + 2500 \cdot 7 \cdot 8 = 180000\,(€)$
- per 6 spot al giorno il costo è $40000 + 3000 \cdot 7 \cdot 8 = 208000\,(€)$

Riassumiamo i dati relativi ai costi e ai ricavi in una tabella: la situazione di miglior resa della pubblicità si avrà in corrispondenza del massimo profitto.

numero spot giornalieri	ricavo (in migliaia di euro)	costo (in migliaia di euro)	profitto (in migliaia di euro)
1	70	73,6	−3,6
2	100	107,2	−7,2
3	180	140,8	39,2
4	240	152	**88**
5	250	180	70
6	260	208	52

Dall'esame della tabella possiamo affermare che l'azienda ottiene il massimo profitto se effettua 4 spot giornalieri per 8 settimane.

Dati numerosi

Quando i dati sono molti la procedura precedente risulta impraticabile; la cosa più conveniente è allora quella di considerare x come variabile continua ed approssimare il valore ottimale trovato all'intero immediatamente inferiore o successivo a seconda del criterio di ottimizzazione. Vediamo un esempio.

Una fabbrica di biciclette ha dei costi fissi mensili di € 150000 e sostiene un costo di € 120 per ogni bicicletta prodotta; il prodotto viene immesso sul mercato con un prezzo di vendita dato dalla relazione $p = 250 - 0{,}015x$ dove x indica la quantità prodotta. L'azienda, sfruttando al meglio i propri impianti ed il personale, riesce a produrre al massimo 5000 biciclette all'anno. Determiniamo la produzione ottimale di biciclette per avere il massimo profitto.

Determiniamo costi, ricavi e profitto in funzione di x, numero di biciclette prodotte:

Costi: $C(x) = 150000 + 120x$

Ricavo: $R(x) = (250 - 0{,}015x)x = -0{,}015x^2 + 250x$

Profitto: $P(x) = -0{,}015x^2 + 130x - 150000$

Dobbiamo dunque massimizzare la funzione P con i vincoli

$$\begin{cases} 0 < x \leq 5000 \\ x \in N \end{cases}$$

Consideriamo la variabile x come se fosse reale e determiniamo il massimo di questa funzione.
Trattandosi di una parabola con concavità rivolta verso il basso il punto di massimo si trova nel vertice, cioè in $x = \dfrac{130}{0{,}03} \approx 4333{,}33$.

I valori interi più vicini alla soluzione sono $x = 4333$ e $x = 4334$; il profitto in tali punti è lo stesso, infatti

$$P(4333) = 131666{,}665 \qquad P(4334) = 131666{,}66$$

Si avrà quindi il massimo profitto producendo 4333 o 4334 biciclette.

2.3 La scelta tra più alternative

In un problema di RO a volte la scelta ottimale non è unica e si diversifica a seconda dei valori assunti dalla variabile d'azione; vediamo qualche esempio.

I esempio: un problema di massimo

Una banca pubblicizza tre forme di investimento di capitali. Nel primo caso (A) offre un rendimento netto del 6% all'anno diminuito di € 1000 per le spese sostenute dalla banca per la gestione del capitale; nel secondo caso (B) offre una rendita netta del 4% all'anno diminuita di € 200 a forfait; nel terzo caso (C) garantisce una rendita netta del 2,5% all'anno senza spese aggiuntive. Determina, al variare del capitale investito la forma più conveniente fra quelle proposte, nell'arco di un anno.

Indichiamo con x il capitale da investire e, assumendo come unità di misura € 1000, calcoliamo gli interessi y che ciascuna delle tre forme produce.

- Investimento di tipo A: $y = 0{,}06x - 1$ (retta a)
- Investimento di tipo B: $y = 0{,}04x - 0{,}2$ (retta b)
- Investimento di tipo C: $y = 0{,}025x$ (retta c)

Le funzioni di rendimento ottenute sono lineari e rappresentano quindi rispettivamente le rette a, b, c della ***figura 6a***. Le ascisse dei punti di intersezione si trovano risolvendo i seguenti sistemi

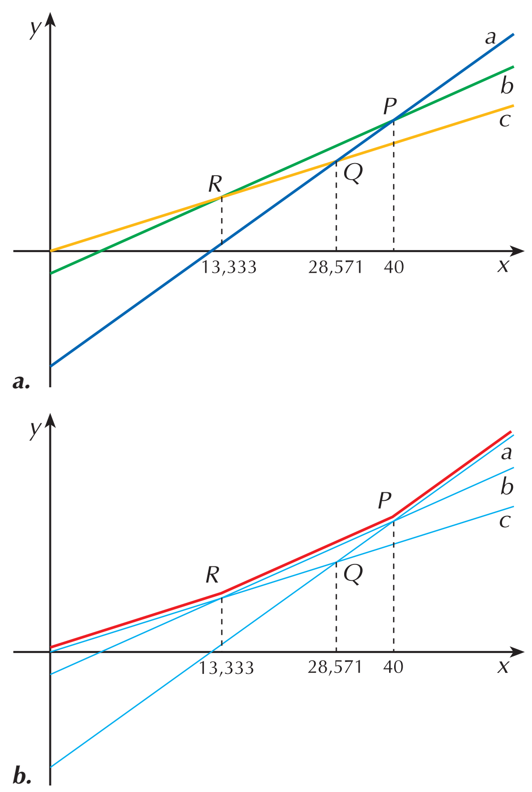
$$a \cap b \begin{cases} y = 0{,}06x - 1 \\ y = 0{,}04x - 0{,}2 \end{cases} \qquad x_P = 40$$

$$a \cap c \begin{cases} y = 0{,}06x - 1 \\ y = 0{,}025x \end{cases} \qquad x_Q = 28{,}571$$

$$b \cap c \begin{cases} y = 0{,}04x - 0{,}2 \\ y = 0{,}025x \end{cases} \qquad x_R = 13{,}333$$

L'investimento migliore è quello che, al variare di x, rende gli interessi più alti alla fine dell'anno, cioè quello che appartiene al tratto in colore rosso in ***figura 6b***.

Figura 6



Possiamo quindi dire che:

- se $0 \leq x < 13{,}333$ la scelta migliore è l'investimento C
- se $13{,}333 < x < 28{,}571$ la scelta migliore è l'investimento B
- se $x > 28{,}571$ la scelta migliore è l'investimento A
- Nel punto $x = 13{,}333$ la scelta può cadere indifferentemente su B o su C; nel punto $x = 28{,}571$ la scelta può cadere indifferentemente su A o su B.

Punti come R e P di questo esempio si dicono **punti di indifferenza**. Un punto di indifferenza si trova quindi in corrispondenza di un valore di x per cui la scelta può cadere indifferentemente su una o su un'altra possibilità.

II esempio: un problema di minimo

Un'azienda alimentare può inscatolare fino ad un massimo di 3q di mais ogni giorno in scatole da 500g ciascuna.
Per fare ciò può utilizzare tre cicli diversi che hanno gli stessi costi per unità di tempo e dei quali si sa che:

- il ciclo A impiega 10 secondi per preparare una scatola e ha tempi di preparazione iniziali di 1 ora;
- il ciclo B impiega 15 secondi per ogni scatola e la sua preparazione iniziale è di 30 minuti;
- il ciclo C impiega 20 secondi per ogni scatola ma ha tempi di preparazione di soli 15 minuti.

Quale ciclo conviene usare per avere il massimo rendimento?

Analizziamo il problema. Con 3q di mais a disposizione si possono produrre 600 scatole da 500g ciascuna; il massimo rendimento, visto che i tre cicli hanno lo stesso costo, si ha utilizzando il ciclo produttivo che richiede meno tempo. La variabile d'azione è quindi il numero x di scatole che si possono riempire e la funzione obiettivo è quella che esprime il tempo y di utilizzo di ciascun ciclo. Assumendo come unità di misura del tempo il minuto, si ha così che:

- per il ciclo A: $y = \frac{1}{6}x + 60$ (retta a)
- per il ciclo B: $y = \frac{1}{4}x + 30$ (retta b)
- per il ciclo C: $y = \frac{1}{3}x + 15$ (retta c)

Ogni funzione ha poi come vincolo il sistema $\begin{cases} 0 \le x \le 600 \\ x \in N \end{cases}$

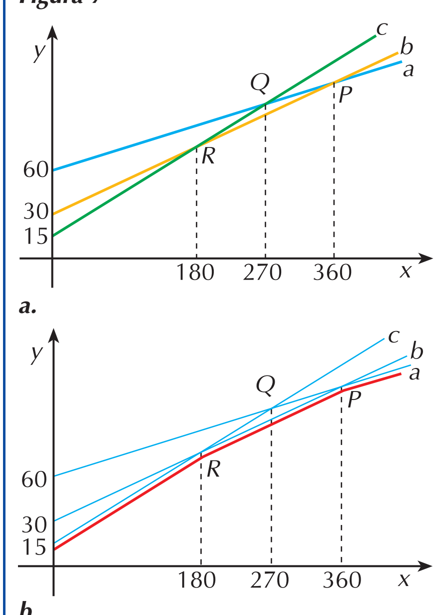


Figura 7

Determiniamo i punti di indifferenza (***figura 7a***):

$a \cap b \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{4}x + 30 \end{cases}$ $P(360,120)$

$a \cap c \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases}$ $Q(270,105)$

$b \cap c \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 30 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases}$ $R(180,75)$

La scelta più conveniente per l'azienda è quella che comporta un minor tempo di utilizzo della macchina (e quindi un minor costo). Dall'analisi del grafico deduciamo che (***figura 7b***):

- se $0 \leq x < 180$ i tempi minori sono quelli relativi alla retta c corrispondente al ciclo C;
- se $x = 180$ i tempi del ciclo C e del ciclo B sono uguali, quindi la scelta può cadere indifferentemente sull'uno o sull'altro;
- se $180 < x < 360$ i tempi minori sono quelli relativi alla retta b corrispondente al ciclo B;
- se $x = 360$ i tempi dei cicli A e B sono uguali, quindi la scelta è indifferente;
- se $360 < x \leq 600$ i tempi minori sono relativi alla retta a, quindi la scelta dovrà cadere sul ciclo A.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La produzione di un bene prevede dei costi definiti dalla funzione $C = 100x + 20000$ e dei ricavi definiti dalla funzione $R = -5x^2 + 750x$, dove x è la quantità di bene prodotta e venduta. Per quali valori di x si ha un guadagno?

a. $x > 80$ **b.** $50 < x < 80$ **c.** $x > 50$ **d.** $x < 80$

2. Un'azienda di trasporto merci offre ai suoi clienti tre diversi tipi di contratto per trasporti a pieno carico e per viaggi non superiori a 2000 km:

A: € 2 000 a forfait

B: € 2 al km

C: € 1 al km a cui bisogna aggiungere € 500 di spese fisse.

Dopo aver rappresentato graficamente la situazione, per ciascuna delle seguenti affermazioni barra vero o falso:

a. per un numero di km inferiore a 500 è più conveniente il contratto B V F
b. per un viaggio di 1000 km conviene il contratto B V F
c. per un viaggio di 1500 km è indifferente il contratto A oppure C V F
d. il contratto A non conviene mai. V F

3. PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

In molti problemi di scelta non vi è certezza dei risultati per diversi fattori: l'impossibilità di avere informazioni complete su un fenomeno, il verificarsi di eventi imprevedibili, l'ingresso sul mercato di prodotti concorrenziali, il cambiamento della situazione politica di un Paese, possibili crisi economiche su vasta scala e così via.
In questi casi le variabili delle funzioni obiettivo sono aleatorie; ci si trova quindi in *condizioni di incertezza* e le scelte possono essere fatte solo in termini di probabilità. Per affrontare questo argomento è quindi necessario avere conoscenze sul calcolo delle probabilità e sulle variabili aleatorie che puoi trovare sul volume 4 del testo base.

3.1 Il criterio del valor medio

Supponiamo che una azienda possa produrre un certo bene con quattro pro-

cessi produttivi diversi, che indicheremo con A_1, A_2, A_3, A_4, e che la vendita di quel bene si possa fare a tre prezzi diversi; indicheremo con E_1, E_2, E_3 gli eventi che indicano la possibilità di vendere al primo, al secondo o al terzo prezzo; tali eventi sono naturalmente incompatibili uno con l'altro (se si vende ad un prezzo, non si può vendere ad un altro) e sono complementari (la vendita deve essere fatta ad uno dei prezzi indicati).
In dipendenza dal processo produttivo scelto e dal prezzo di vendita, l'azienda ha calcolato che potrà avere dei guadagni che, in migliaia di euro, sono indicati nella seguente tabella a doppia entrata.

		ALTERNATIVE			
		A_1	A_2	A_3	A_4
EVENTI	E_1	-50	0	50	10
	E_2	160	320	120	-100
	E_3	500	180	160	400

In essa leggiamo per esempio che con il processo produttivo A_1, al verificarsi dell'evento E_1, si avrebbe una perdita di € 50 000; con il processo produttivo A_3, al verificarsi dell'evento E_2, si avrebbe un guadagno di € 120 000 e così via. Vediamo allora come si può procedere per fare una scelta ragionata.

Supponiamo che, attraverso indagini di mercato, si sia riusciti a determinare la probabilità di riuscire a vendere ad uno dei prezzi fissati, sia cioè nota la probabilità di ciascuno degli eventi E_i.
Aggiungiamo alla tabella precedente una colonna che riporti tali probabilità; trattandosi di eventi complementari ed incompatibili la somma delle tre probabilità deve essere ovviamente 1.

		ALTERNATIVE				
		A_1	A_2	A_3	A_4	Probabilità
EVENTI	E_1	-50	0	50	10	0,4
	E_2	160	320	120	-100	0,3
	E_3	500	180	160	400	0,3

Ciascuna alternativa può essere vista come una variabile casuale che assume i valori indicati dal corrispondente guadagno (positivo o negativo). Così, ad esempio, la variabile aleatoria A_1 può assumere il valore -50 con probabilità 0,4, il valore 160 con probabilità 0,3, il valore 500 con probabilità 0,3; analogamente per le altre variabili aleatorie.
Un criterio di scelta può allora essere basato sul comportamento medio di ciascuna variabile, vale a dire che, una volta calcolati i guadagni medi di ciascuna alternativa, sceglieremo quella che ha ottenuto il guadagno medio più alto.

Tenendo presente che $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, nel nostro caso abbiamo dunque:

alternativa A_1: $M(A_1) = -50 \cdot 0{,}4 + 160 \cdot 0{,}3 + 500 \cdot 0{,}3 = 178$

alternativa A_2: $M(A_2) = 0 \cdot 0{,}4 + 320 \cdot 0{,}3 + 180 \cdot 0{,}3 = 150$

alternativa A_3: $\quad M(A_3) = 50 \cdot 0{,}4 + 120 \cdot 0{,}3 + 160 \cdot 0{,}3 = 104$

alternativa A_4: $\quad M(A_3) = 10 \cdot 0{,}4 - 100 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}3 = 94$

Il guadagno atteso ha il suo massimo con l'alternativa A_1, sarà dunque su questo processo produttivo che cadrà la nostra scelta.

Generalizziamo quanto visto attraverso l'esempio.

In un problema di scelta fra più alternative in condizione di incertezza possiamo individuare:

- un certo numero m di eventi aleatori E_i, indipendenti e complementari, ciascuno avente probabilità p_i, in modo che $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$;
- un certo numero n di alternative A_j fra cui effettuare le scelte;
- $n \times m$ risultati R_{ij} che derivano dall'alternativa A_j in dipendenza dell'evento E_i.

I risultati R_{ij}, che sono i valori della funzione obiettivo che si vuole massimizzare o minimizzare, possono essere rappresentati in una tabella a doppia entrata, alla quale di solito si affianca una colonna con le probabilità degli eventi E_i

		ALTERNATIVE						
		A_1	A_2		A_j		A_n	Probabilità
EVENTI	E_1	R_{11}	R_{12}		R_{1j}		R_{1n}	p_1
	E_2	R_{21}	R_{22}		R_{2j}		R_{2n}	p_2
	E_i	R_{i1}	R_{i2}		R_{ij}		R_{in}	p_i
	E_m	R_{m1}	R_{m2}		R_{mj}		R_{mn}	p_m

A tale tabella si dà il nome di **tabella dei risultati** o, in terminologia anglosassone, **Playoff table**.
I valori di probabilità p_i possono essere determinati con indagini di tipo statistico o mediante valutazioni soggettive basate sul grado di fiducia che si ripone nell'evento E_i.
In questo modello, le alternative A_j assumono la funzione di variabili aleatorie i cui valori, con le rispettive probabilità, sono quelli della colonna A_j della tabella dei risultati.

Un criterio di scelta che ben si adatta a questo modello è il **criterio del valor medio**. Esso consiste nel calcolare il valore atteso M di ciascuna variabile aleatoria A_j :

$$M(A_j) = \sum_{i=1}^{n} R_{ij} p_i$$

e nello scegliere, a seconda dei casi, il massimo o il minimo dei valori attesi ottenuti.

ESEMPI

1. Per produrre un certo articolo una azienda può scegliere fra tre diversi processi produttivi, che indichiamo con A, B, C, per i quali si è stimata la seguente funzione di profitto, in euro, in dipendenza dalla quantità x prodotta e venduta giornalmente:

- per il processo A: $P_A = 0{,}2x - 300$
- per il processo B: $P_B = 0{,}18x - 200$
- per il processo C: $P_C = 0{,}19x - 250$

Le probabilità di vendita dell'articolo prodotto sono espresse dalla seguente tabella:

Quantità	1000	2000	3000	4000	5000
Probabilità	0,1	0,3	0,35	0,2	0,05

In base a queste informazioni, qual è il processo produttivo più conveniente per l'azienda?

Il processo produttivo più conveniente è quello che consente di realizzare il massimo profitto, il quale dipende però dalla quantità venduta; gli eventi aleatori E_i sono quindi quelli che indicano le quantità vendute. Per costruire la tabella dei risultati, dobbiamo calcolare, per ogni processo produttivo, i profitti ottenuti dalle vendite di 1000, 2000, 3000, 4000 e 5000 unità di bene. Per il processo produttivo A abbiamo, in euro

$P_A(1000) = 0{,}2 \cdot 1000 - 300 = -100$

$P_A(2000) = 0{,}2 \cdot 2000 - 300 = 100$

$P_A(3000) = 0{,}2 \cdot 3000 - 300 = 300$

$P_A(4000) = 0{,}2 \cdot 4000 - 300 = 500$

$P_A(5000) = 0{,}2 \cdot 5000 - 300 = 700$

Il valore atteso del profitto per questo processo produttivo, tenendo conto dei valori di probabilità è dunque:

$$M(A) = -100 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}3 + 300 \cdot 0{,}35 + 500 \cdot 0{,}2 + 700 \cdot 0{,}05 = 260\,(€)$$

Analogamente per gli altri processi produttivi. La tabella dei risultati, con l'indicazione nell'ultima riga dei valori attesi, è dunque la seguente (q indica la quantità venduta):

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1 $q = 1000$	-100	-20	-60	0,1
	E_2 $q = 2000$	100	160	130	0,3
	E_3 $q = 3000$	300	340	320	0,35
	E_4 $q = 4000$	500	520	510	0,2
	E_5 $q = 5000$	700	700	700	0,05
	M	260	304	282	

Poiché il maggior valor medio si ha per il procedimento produttivo B, sarà questo da scegliere per avere il massimo guadagno.

3.2 Scelte che tengono conto del rischio

La soglia del rischio

Se è vero che il criterio del valor medio ci aiuta a fare delle scelte, è anche vero che tale metodo non tiene conto della variabilità dei valori assunti dalla funzione obiettivo; se poi teniamo presente che spesso le valutazioni delle probabilità sono soggettive, ci accorgiamo che non sempre un criterio di scelta basato sulla massimizzazione (o minimizzazione) del valor medio della funzione obiettivo può essere sufficiente.
Supponiamo, ad esempio, che i valori dei profitti risultanti dall'investimento di un capitale in dipendenza di due eventi siano quelli riportati nella seguente tabella (in migliaia di euro)

		ALTERNATIVE		
		A	B	Probabilità
EVENTI	E_1	-200	60	0,2
	E_2	300	235	0,8

Calcoliamo il valor medio di ogni alternativa:

$M(A) = -200 \cdot 0{,}2 + 300 \cdot 0{,}8 = 200$

$M(B) = 60 \cdot 0{,}2 + 235 \cdot 0{,}8 = 200$

Poiché $M(A) = M(B)$, le due alternative sono indifferenti ed è quindi la stessa cosa, dal punto di vista del profitto medio atteso, scegliere una o scegliere l'altra.
Se però le guardiamo sotto un altro punto di vista, quello del rischio che si corre investendo in A o in B, le cose non stanno più così: con la forma di investimento A possiamo guadagnare molto se si verifica l'evento E_2, ma possiamo anche perdere molto se si verifica l'evento E_1; con la forma di investimento B non arriviamo ai guadagni che potremmo avere in A, ma non perdiamo mai del denaro. In questo caso è dunque la nostra propensione al rischio che ci fa scegliere.
Un caso come questo si presenta frequentemente quando si deve scegliere in che modo investire un capitale; alcuni Fondi di investimento proposti dalle banche sono più "a rischio" di altri, perché una percentuale elevata del capitale viene investito in forme che possono dare grandi guadagni ma anche grandi perdite (ad esempio gli investimenti in titoli azionari); altri Fondi sono considerati meno "a rischio" perché, pur avendo una quota del capitale investito in azioni, la maggior parte di esso rimane impegnato in forme più tranquille come Titoli di Stato, obbligazioni e così via.

Dobbiamo quindi affrontare il problema della valutazione del rischio: come è possibile determinare una misura del rischio che si corre facendo una scelta piuttosto che un'altra?
Possiamo sicuramente dire che **un'alternativa è più rischiosa di un'altra se nella prima vi è maggior variabilità fra i dati**; allora, poiché il grado di variabilità di una distribuzione di probabilità è misurato dallo scarto quadratico medio σ, dovremo calcolare lo scarto quadratico medio di ogni alternativa: un valore di σ elevato indica grande variabilità e quindi maggior rischio.

Se consideriamo il modello generale di un problema di scelta in condizioni di incertezza visto nel paragrafo precedente, lo scarto quadratico medio di ogni alternativa A_j è dato da

$$\boxed{\sigma(A_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[R_{ij} - M(A_j)\right]^2 \cdot p_i}}$$

Tornando all'esempio iniziale, calcoliamo i valori di σ delle due forme di investimento

$$\sigma(A) = \sqrt{(-200 - 200)^2 \cdot 0{,}2 + (300 - 200)^2 \cdot 0{,}8} = 200$$

$$\sigma(B) = \sqrt{(60 - 200)^2 \cdot 0{,}2 + (235 - 200)^2 \cdot 0{,}8} = 70$$

La seconda alternativa ha una variabilità minore rispetto alla prima, quindi un grado di rischio minore; ciò conferma le nostre valutazioni iniziali.

Se abbiamo imparato a valutare il rischio, non abbiamo però ancora dato una risposta precisa alla domanda iniziale: come scegliere tenendo conto di quest'ultimo?
È evidente che ogni persona ha una sua propensione al rischio e la scelta, dopo aver analizzato la situazione, è quindi soggettiva. Quello che si può fare è allora fissare una soglia che rappresenti il rischio massimo sopportabile da un individuo (tale soglia può essere diversa quindi da soggetto a soggetto) oltre la quale scartare le alternative; di solito si sceglie una frazione del valor medio.

La misura del rischio

Indicato con **grm**$(\boldsymbol{A_j})$ il **grado di rischio massimo** dell'alternativa A_j, si ha che

$$\text{grm}(A_j) = \frac{M(A_j)}{k} \qquad \text{con} \qquad k \in N_0$$

Il valore di k viene evidentemente scelto dal soggetto che sta facendo la valutazione. Una scelta di valori piccoli per k indica grande propensione al rischio (per $k = 1$ si ha il grado di rischio massimo); tale propensione diminuisce al crescere di k e quindi grandi valori di k indicano valutazioni di prudenza.
Una volta fissato il valore di k e calcolato il corrispondente grm per ogni alternativa A_j, per fare una scelta basta a questo punto confrontare il grado di rischio di ogni alternativa con il corrispondente grm; se

- $\sigma(A_j) < \text{grm}(A_j)$ l'alternativa A_j può essere ritenuta accettabile dal soggetto
- $\sigma(A_j) > \text{grm}(A_j)$ l'alternativa A_j deve essere scartata perché troppo rischiosa.

Vediamo un esempio di applicazione di questo criterio.
Ad un piccolo risparmiatore, la cui propensione al rischio può ritenersi pari ad $\frac{1}{4}$ del valor medio di ogni alternativa, vengono proposte due forme di investimento dei capitali dalle quali si possono avere i profitti (in migliaia di euro) indicati nella seguente tabella dei risultati.

		ALTERNATIVE		
		A	B	Probabilità
EVENTI	E_1	5	3	0,4
	E_2	7	9	0,6

Determiniano l'alternativa più indicata per il risparmiatore.

Calcoliamo il valor medio delle due alternative:

$$M(A) = 6{,}2 \qquad M(B) = 6{,}6$$

Se non tenessimo conto del fattore rischio, la scelta sarebbe già fatta: l'alternativa più conveniente è quella che dà il profitto medio più elevato e quindi l'alternativa B.
Vediamo che cosa accade tenendo presente il grado di rischio massimo di questo risparmiatore; calcoliamo gli scarti quadratici medi di ogni alternativa:

$$\sigma(A) = \sqrt{(5-6{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (7-6{,}2)^2 \cdot 0{,}6} = 0{,}98$$

$$\sigma(B) = \sqrt{(3-6{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (9-6{,}6)^2 \cdot 0{,}6} = 2{,}94$$

Posto $k = 4$, il grado di rischio massimo per l'alternativa A è $\text{grm}(A) = \dfrac{6{,}2}{4} = 1{,}55$, quello per l'alternativa B è $\text{grm}(B) = \dfrac{6{,}6}{4} = 1{,}65$.

Confrontiamo i valori trovati riassumendoli in una tabella:

	ALTERNATIVE	
	A	B
M	6,2	6,6
σ	0,98	2,94
$\text{grm} = \dfrac{M}{4}$	1,55	1,65

Ci accorgiamo subito che il rischio dell'alternativa B (che è 2,94) è maggiore del grado di rischio sopportabile dal risparmiatore (che è 1,65), mentre il rischio dell'alternativa A (che è 0,98) è minore del grado di rischio massimo (che è 1,55); se teniamo conto del rischio, il risultato precedente è ribaltato e dobbiamo concludere che il risparmiatore sceglierà l'alternativa A perché, pur facendogli guadagnare di meno, è meno rischiosa.

Il criterio del pessimista e quello dell'ottimista

Un altro modo di procedere per scegliere fra più alternative in condizioni di incertezza è quello che prende il nome di **criterio del pessimista**; esso si applica in questo modo.

- Quando si hanno più possibilità di scelta e siamo di fonte ad un problema di massimo:
  - si individua il valore più basso della funzione di utilità per ogni alternativa (il minimo di ogni colonna della tabella dei risultati);
  - si trova il massimo dei valori individuati;
  - si sceglie come alternativa quella cui appartiene il massimo dei minimi.

  Per come avviene la scelta questo criterio si dice anche **criterio del maximin**.

- Se invece siamo in presenza di un problema di minimo:
  - si individua il valore più alto della funzione di utilità per ogni alternativa (il massimo di ogni colonna della tabella dei risultati);
  - si trova il minimo dei valori individuati;
  - si sceglie come alternativa quella cui appartiene il minimo dei massimi.

  Per come avviene la scelta questo criterio si dice anche **criterio del minimax**.

Il nome di "criterio del pessimista" dato a questo metodo deriva dal fatto che si sceglie sempre la migliore fra le situazioni peggiori che possono capitare. Come avrai senz'altro notato, questo criterio prescinde dai valori di probabilità degli eventi E_i.

Criterio opposto a questo è quello dell'**ottimista** che consiste nello scegliere la migliore fra le migliori situazioni; quindi:

- in presenza di un problema di massimo si sceglieranno i valori più alti di ogni alternativa e quindi l'alternativa che comporta il valore massimo fra questi (criterio del **maximax**);

- in presenza di un problema di minimo si sceglieranno i valori più bassi di ogni alternativa e quindi l'alternativa che comporta il valore minimo fra questi (criterio del **minimin**).

Ad esempio, se un **problema di massimizzazione** dei risultati avesse la seguente tabella

		ALTERNATIVE				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
EVENTI	E_1	10	−20	15	8	−2
	E_2	−1	30	10	20	16
	E_3	5	40	−5	30	10

- con il criterio del pessimista si procederebbe in questo modo:

  situazione peggiore $A: -1$ $B: -20$ $C: -5$ ***D* : 8** $E: -2$

  scelta D perché la meno peggio delle situazioni.

- con il criterio dell'ottimista si procederebbe in questo modo:

  situazione migliore $A:10$ **$B:40$** $C:15$ $D:30$ $E:16$

  scelta B perché è la migliore fra le situazioni migliori.

Se un **problema di minimizzazione** dei risultati avesse la seguente tabella

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	D
EVENTI	E_1	10	5	8	15
	E_2	18	7	6	10
	E_3	9	12	11	7

- con il criterio del pessimista si procederebbe in questo modo:

  situazione peggiore $A:18$ $B:12$ **$C:11$** $D:15$

  scelta C perché è la meno peggio delle situazioni.

- con il criterio dell'ottimista si procederebbe in questo modo:

  situazione migliore $A:9$ **$B:5$** $C:6$ $D:7$

  scelta B perché è la migliore fra le situazioni migliori.

3.3 Un esempio conclusivo

Vediamo di riassumere le cose che abbiamo imparato finora attraverso un esempio.
Una azienda produce un certo articolo che immette sul mercato al prezzo di € 2. Per la sua fabbricazione può scegliere tra due diversi processi produttivi che hanno la stessa resa ma costi diversi:

- processo A: costo unitario di € 1 più costi fissi di € 1000
- processo B: costo unitario di € 0,80 più un costo pari, in euro, allo 0,04% del quadrato degli articoli prodotti.

La quantità venduta è stimata in base alla seguente tabella.

Articoli venduti	500	1000	1500	2000	2500
Probabilità	0,10	0,15	0,20	0,30	0,25

Esaminiamo quale processo produttivo scegliere in base:

- al criterio del valor medio;
- all'introduzione di un rischio pari alla quarta parte del valor medio;
- al criterio del pessimista;
- al criterio dell'ottimista.

Per entrambi i processi produttivi il ricavo è $R(x) = 2x$ dove x indica la quantità prodotta e venduta

Per il processo produttivo A il profitto è $P_A(x) = 2x - x - 1000 = x - 1000$

Per il processo produttivo B il profitto è $P_B(x) = 2x - 0,80x - 0,0004x^2 = 1,20x - 0,0004x^2$

Le alternative fra cui scegliere sono i due processi produttivi, gli eventi sono le vendite possibili e la funzione obiettivo è il profitto. Scriviamo la tabella dei risultati (in euro) e aggiungiamo le righe con i valori medi del profitto di ogni alternativa, gli scarti quadratici medi e i coefficienti di massimo rischio

		ALTERNATIVE		
		A	B	Probabilità
EVENTI	E_1 500	−500	500	0,1
	E_2 1000	0	800	0,15
	E_3 1500	500	900	0,20
	E_4 2000	1000	800	0,30
	E_5 2500	1500	500	0,25
	M	725	715	
	σ	641,77488	162,09565	
	$\text{grm} = \dfrac{M}{4}$	181,25	178,75	

- Se la scelta si deve basare sul criterio del valor medio, l'alternativa più conveniente è la A che comporta un guadagno atteso maggiore.
- Se dobbiamo tenere conto del fattore rischio con un grado massimo pari a $\frac{1}{4}$ del valore medio, l'alternativa migliore è la B.
- In base al criterio del pessimista l'alternativa migliore è la B.
- In base al criterio dell'ottimista l'alternativa migliore è la A.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La tabella dei risultati relativa a tre alternative di guadagno (in migliaia di euro) in dipendenza da quattro eventi aleatori incompatibili e complementari è la seguente

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1	2	0	10	0,15
	E_2	0	14	8	0,30
	E_3	16	6	6	0,35
	E_4	6	5	2	0,20

Completa le seguenti richieste:

a. il valore medio dell'alternativa A è ....

b. il valore medio dell'alternativa B è ....

c. il valore medio dell'alternativa C è ....

d. l'alternativa più conveniente è ....

2. Riferendoti al problema precedente, se il rischio massimo tollerabile è $\frac{2}{3}$ del valor medio, qual è la scelta ottimale?

4. La programmazione lineare: il modello del problema

Il modello matematico di un problema di RO è costituito da una funzione da ottimizzare, la *funzione obiettivo*, e da un insieme di *vincoli*, espressi da equazioni e/o disequazioni, tutti indipendenti tra loro. Se la funzione obiettivo e il sistema dei vincoli sono relazioni di tipo lineare, si parla di **programmazione lineare** (nel seguito abbreviata in PL).
Il modello matematico di un problema di PL è dunque il seguente:

funzione obiettivo $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

sistema dei vincoli
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ .... \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,.........,n \end{cases}$$

vincoli tecnici

vincoli di segno

dove i simboli di disuguaglianza delle relazioni dei vincoli, che abbiamo indicato sempre con " $\leq$ ", possono anche essere dei simboli di " $\geq$ " oppure di " $=$ " e dove i coefficienti delle relazioni sono numeri reali. Vedremo più avanti che, con opportuni accorgimenti, si possono comunque sempre scrivere delle relazioni di uguaglianza.
In tale modello:

- le variabili x_i sono le variabili d'azione
- gli n coefficienti c_i si dicono **coefficienti economici** o **prezzi**;
- i coefficienti a_{ki} delle m relazioni vincolari nelle n variabili x_i (k varia fra 1 e m, i varia fra 1 e n) si dicono **coefficienti tecnologici**;
- i termini noti b_k delle relazioni vincolari si dicono **richieste**.

Nei paragrafi che seguono studieremo dei metodi che ci permettano di risolvere questo tipo di problemi, con particolare riguardo a quelli in due sole variabili o ad essi riconducibili utilizzando il metodo grafico.