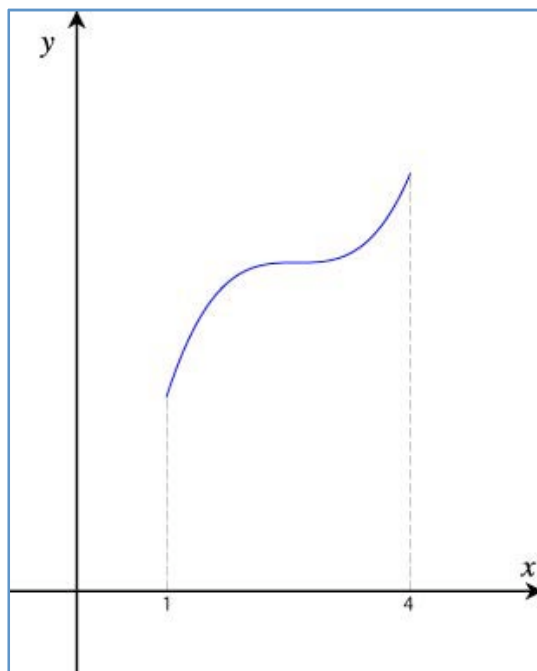
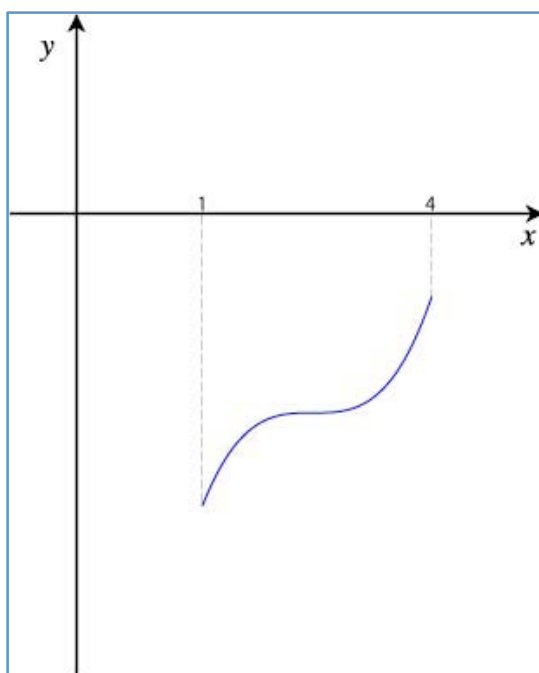


STUDIO DEL SEGNO DI UNA FUNZIONE

Quando si studia una funzione $y = f(x)$ (funzione reale di variabile reale) è fondamentale conoscere il segno, in altre parole sapere per quali valori di x , $f(x)$ è positiva, negativa o uguale a zero. Per esempio se supponiamo che nell'intervallo $[1; 4]$ delle ascisse la funzione sia positiva, allora la parte di grafico corrispondente, in quell'intervallo, passerà nel semipiano superiore:

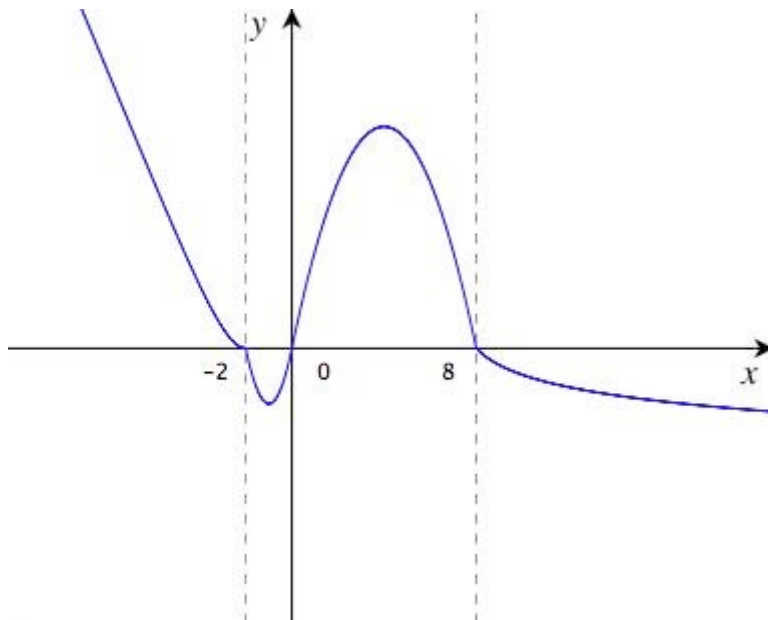


Se, viceversa, nell'intervallo $[1; 4]$ delle ascisse la funzione è negativa, allora il grafico relativo passerà nel semipiano inferiore:



I punti \bar{x} nei quali $f(\bar{x}) = 0$ sono i punti $(\bar{x}, 0)$ del grafico in cui la funzione attraversa l'asse X.

Se, per esempio, sappiamo che la funzione $y = f(x)$ è positiva in $(-\infty, -2) \cup (0, 8)$, negativa in $(-2, 0) \cup (8, +\infty)$ e nulla in $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ allora uno dei grafici possibili sarebbe il seguente:

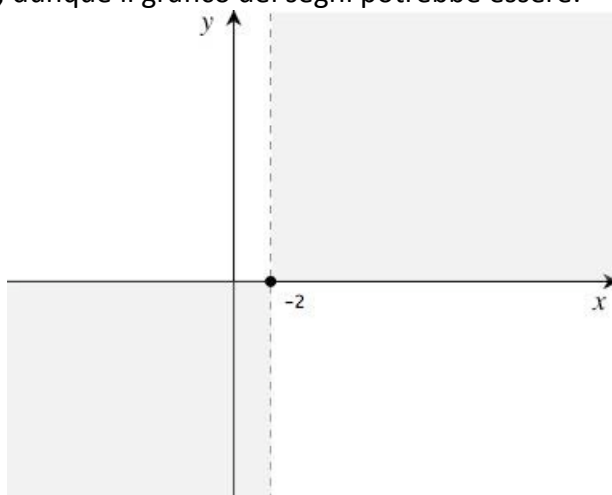


Il grafico riportato sopra, così come quelli precedenti, è solo indicativo dato che non abbiamo altre informazioni sulla funzione.

In tutti i casi, cosa si deve fare una volta che sono stati individuati gli intervalli dove la funzione è positiva, negativa, nulla?

In corrispondenza di tali intervalli si cancella la parte di semipiano nella quale la funzione non passa.

Per esempio supponiamo che per $x \in (-\infty, 2)$ si ha $f(x) > 0$ e che per $x \in (2, +\infty)$ si ha $f(x) < 0$ e che $f(2) = 0$, dunque il grafico dei segni potrebbe essere:



Facciamo ora degli esempi che riguardano funzioni di vario tipo e vediamo di volta in volta come affrontare lo studio del segno a seconda del tipo di funzione:

FUNZIONI POLINOMIALI

Sono del tipo: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ dove il secondo membro è un polinomio di grado n con $n \geq 3$ (se $n = 1$ la funzione è una retta; se $n = 2$ è una parabola, funzioni già note dagli anni precedenti)

Ricordiamo che il Campo di esistenza (Dominio) di tali funzioni è l'insieme \mathbb{R} .

Per raggiungere lo scopo che ci siano prefissi occorre:

- 1) Scomporre il polinomio in polinomi di 1° e 2° grado dei quali sappiamo studiare il segno
- 2) Studiare il segno di ciascuno di essi e riportarlo in un grafico composto da tante righe quanti sono i fattori
- 3) La retta (\mathbb{R}) sarà suddivisa in intervalli il cui segno sarà dato dalla regola della moltiplicazione dei segni presenti nelle varie righe
- 4) Si disegna un piano cartesiano e si cancellano le zone in cui la funzione non passa (come già detto precedentemente):

Esempio 5: $y = x^3 + 3x^2 + 2x$

La funzione assegnata si può scomporre nel seguente modo: $y = x(x^2 + 3x + 2)$.
 Studiamo i segni di x e $(x^2 + 3x + 2)$.

Il fattore x è positivo quando $x > 0$, negativo quando $x < 0$ e uguale a 0 quando $x = 0$

Per studiare il segno di $x^2 + 3x + 2$ occorre:

Risolvere l'equazione associata $x^2 + 3x + 2$

Vedere il segno del termine di 2° grado

Trarre le relative conclusioni

Risolviamo l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Tale equazione ha dunque due radici reali e distinte $x_1 = -2$ $x_2 = -1$

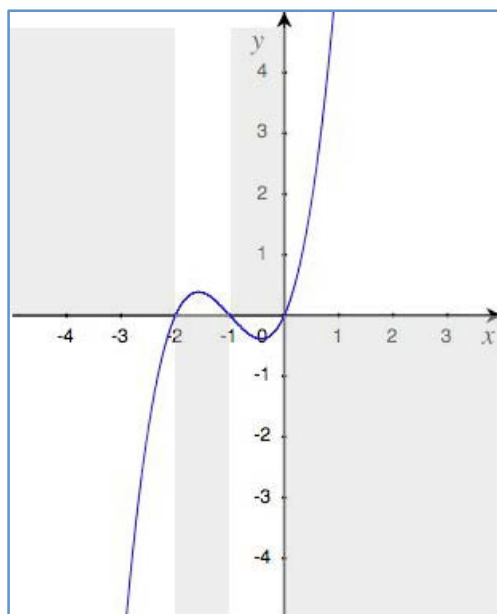
Il segno di x^2 è positivo, pertanto il polinomio di 2° grado è positivo all'esterno delle radici ($x < -2$, $x > -1$) e negativo all'interno ($-2 < x < -1$) e nullo in $x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Riportiamo in un grafico i segni dei due fattori ora studiati:

| | | | |
|----|----|---|---|
| -2 | -1 | 0 | |
| - | + | - | + |

(nel grafico la riga continua indica la positività, quella discontinua la negativa) dal grafico dei segni ora svolto si vede che la funzione $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ è positiva per $x \in (-2, -1)$ e per $x \in (0, +\infty)$, negativa per $x \in (-\infty, -2)$ e per $x \in (-1, 0)$ e nulla in $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$.

Dunque riportando ciò in un piano cartesiano :



I punti del grafico $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ sono i punti in cui la funzione attraversa l'asse X .

Esempio 6: $y = -x^4 + 1$

La funzione si può scomporre come $y = (1 - x^2)(1 + x^2)$

Studiamo i segni dei due polinomi:

$$1 - x^2$$

Risolviamo l'equazione $1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

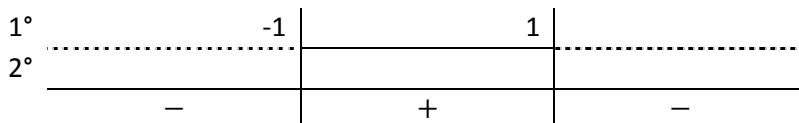
Il coefficiente di x^2 è negativo pertanto $1 - x^2$ è positivo all'interno delle radici, negativo all'esterno e nullo in $x_1 = -1$ $x_2 = 1$.

$$1 + x^2$$

Risolviamo l'equazione $1 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = -1$

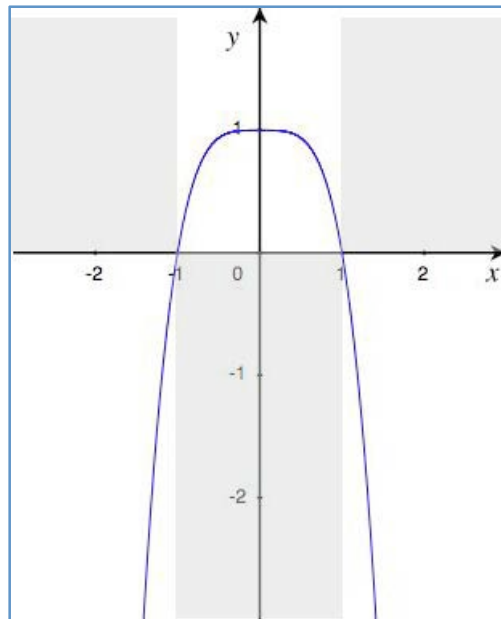
Tale equazione non ha soluzioni. Il coefficiente di x^2 è positivo, dunque il segno di $1 + x^2$ è positivo per ogni x (in tutto \mathbb{R}).

Facciamo il grafico dei segni:



Dal grafico dei segni si evince che la funzione è positiva per $x \in (-1, 1)$, negativa per $x \in (-\infty, -1)$ o $x \in (1, +\infty)$ e nulla quando $x = -1$ o $x = 1$.

Riportando gli esiti dello studio della funzione $y = -x^4 + 1$ in un piano cartesiano si ha:



Esempio 7: $y = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Per scomporre tale polinomio ricorriamo al metodo di Ruffini e sostituiamo al posto di x i possibili divisori di 6 che sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ per $x = -1 \rightarrow y = 0$ per cui il polinomio è divisibile per $(x + 1)$ e inoltre:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -3 & -3 & 7 & 6 \\ -1 & & -1 & 4 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & = \end{array}$$

Quindi $x^2 - 3x^2 - 3x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$ ora scomporre il polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Procedendo come prima si trova anche in questo caso che per $x = -1 \rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
 Pertanto la nostra funzione è ancora divisibile per $x + 1$, quindi è divisibile per $(x + 1)^2$, inoltre

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & = \end{array}$$

Pertanto la funzione $y = x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 7x + 6$ si può scrivere $y = (x + 1)^2 (x^2 - 5x + 6)$

Possiamo ora studiare i segni di $(x + 1)^2$ e di $x^2 - 5x + 6$

$(x + 1)^2$ è sempre positivo perchè è un quadrato con le sole eccezioni di $x = -1$ poichè per quel valore $x + 1 = 0$ e quindi $(x + 1)^2 = 0$. Risolviamo l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

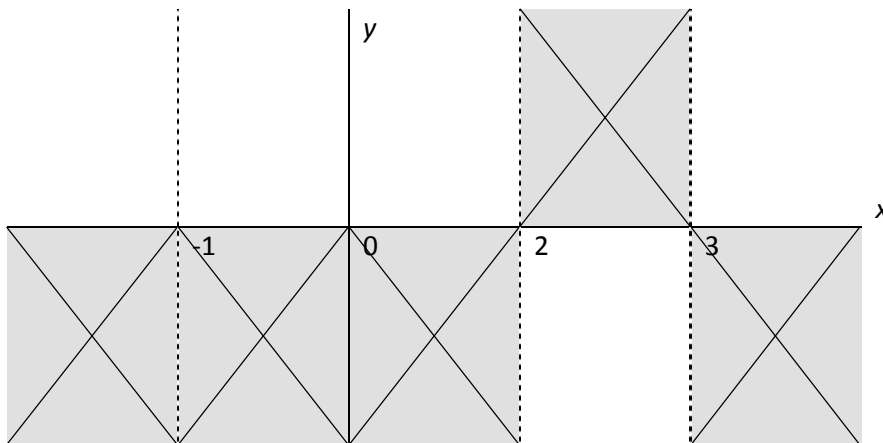
Poichè il segno di x^2 è positivo, $x^2 - 5x + 6$ è positivo all'estremo delle radici, negativo all'interno

ed è nulla per $x = 2$ o $x = 3$. Segue il grafico:

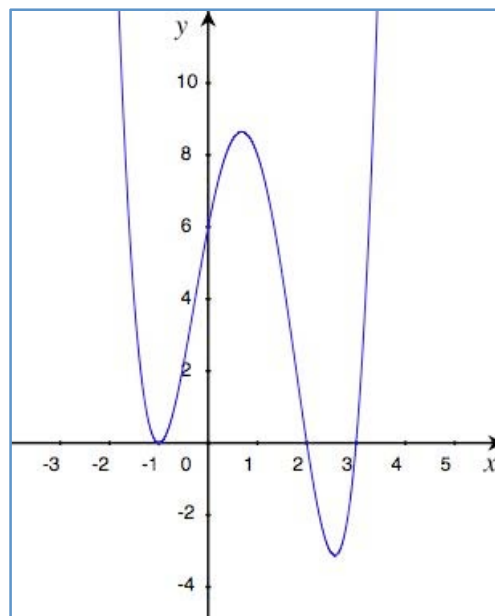
| | | | | |
|----|----|---|---|---|
| 1° | -1 | 2 | 3 | |
| 2° | + | + | - | + |

Quindi la funzione è positiva per $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 2)$ e $x \in (3, +\infty)$; mentre è negativa per $x \in (2, 3)$ ed è nulla in $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$.

Riportando tali risultati in un piano cartesiano si ha:



Il grafico della funzione è



FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Sono funzioni $y = f(x)$ in cui $f(x)$ è una frazione algebrica. Es. $y = \frac{2x-1}{x^2+3}$

Per studiare il segno di una funzione di questo tipo occorre:

- Studiare il segno del numeratore;
- Studiare il segno del denominatore;
- Fare il grafico dei segni corrispondenti;
- Riportare gli esiti del grafico sul piano cartesiano.

Esempio 8: $y = \frac{x-3}{x^2+4x-5}$

$$x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

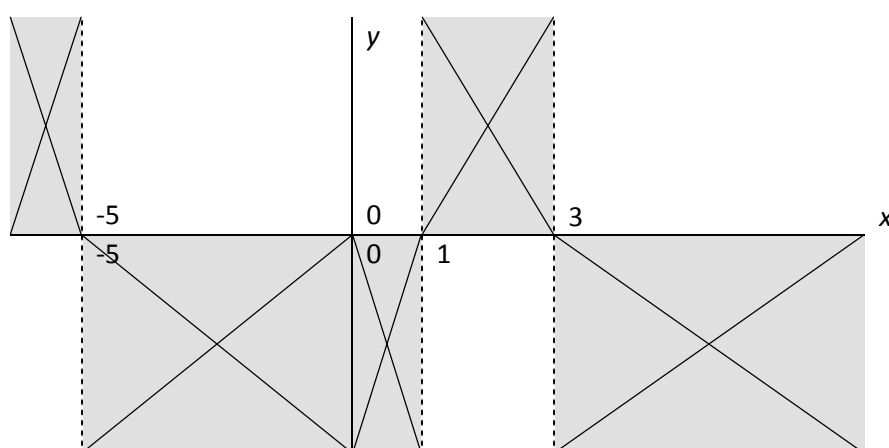
$$x^2 + 4x - 5 > 0 \rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3 = \begin{matrix} \nearrow -5 \\ \searrow 1 \end{matrix} \quad (\text{è stata applicata la formula ridotta})$$

Il denominatore si annulla per $x = -5$ e $x = 1$ (valori che non fanno parte del dominio della funzione assegnata) e poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il polinomio sarà positivo all'esterno di tali valori (cioè per $x < -5$ o $x > 1$) e negativo all'interno (cioè per $-5 < x < 1$)

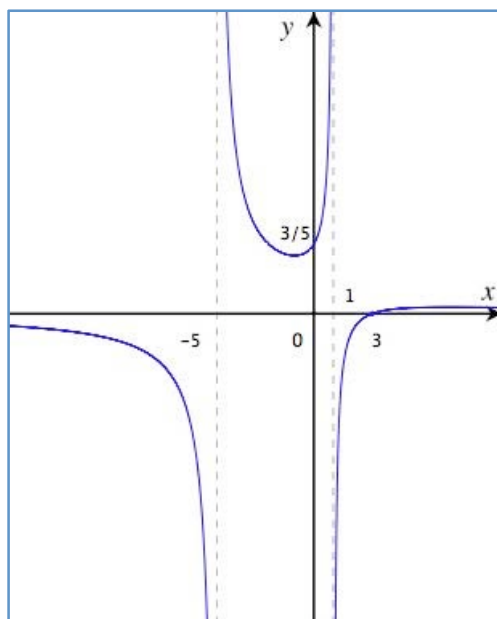
Ecco dunque il grafico dei segni

| | | | | |
|---|----|---|---|---|
| N | -5 | 1 | 3 | |
| D | - | + | - | + |

Riportiamone ora gli esiti sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



La funzione passa per il punto (3,0) mentre le rette $x = -5$ ed $x = 1$ sono gli asintoti verticali.

Esempio 9: $y = \frac{x^2 - x}{9 - x^2}$

1°) $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

Il numeratore ha due radici distinte, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il polinomio è positivo all'esterno delle radici e negativo all'interno.

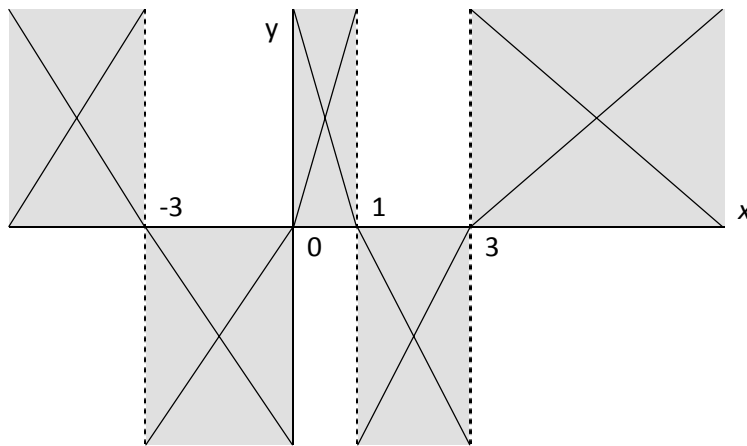
2°) $9 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Il denominatore ha due radici distinte, $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$ e, poiché il coefficiente del termine di 2° grado è negativo, il polinomio è positivo all'interno e negativa all'esterno (i valori $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$ vanno esclusi dal campo di esistenza).

Il grafico dei segni, pertanto, sarà:

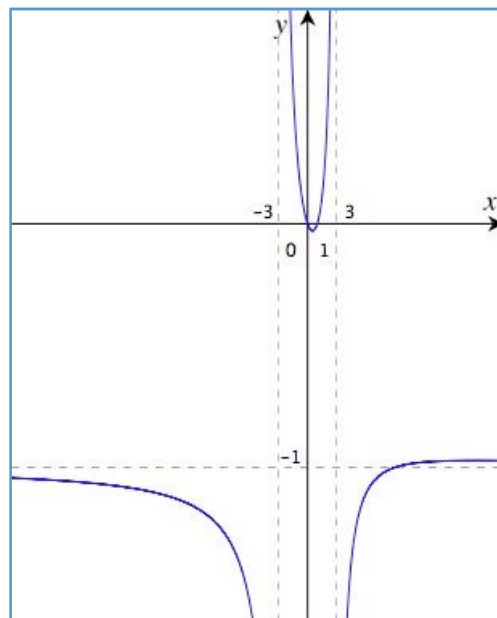
| | | | | | |
|----|----|---|---|---|---|
| 1° | -3 | 0 | 1 | 3 | |
| 2° | | | | | |
| | - | + | - | + | - |

Riportiamo sul piano cartesiano i risultati del grafico dei segni:



La funzione passa per i punti $(0,0)$ e $(1,0)$, mentre le rette $x = -3$ e $x = 3$ sono gli asintoti verticali.

Il grafico della funzione è:

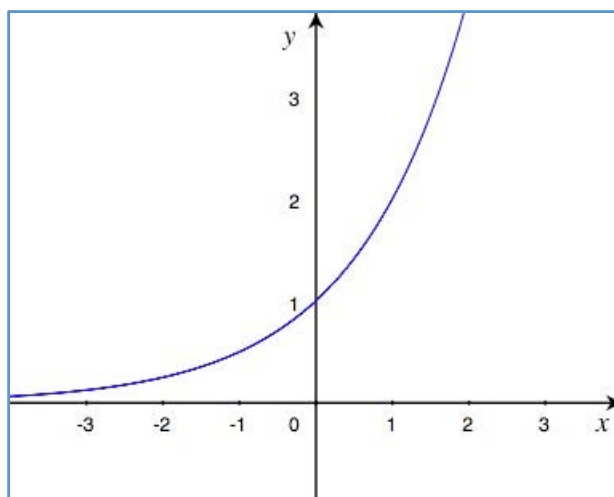


La funzione passa per i punti $(0,0)$ e $(1,0)$, le rette $x = -3$ ed $x = 3$ sono gli asintoti verticali, mentre la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale.

FUNZIONI ESPONENZIALI

Cominciamo col considerare una funzione esponenziale semplice del tipo $y = a^x$ dove a ricordiamolo, deve essere una base positiva. In tal caso il segno di a^x è sempre maggiore di zero per ogni x .

Esempio 1: $y = 2^x$



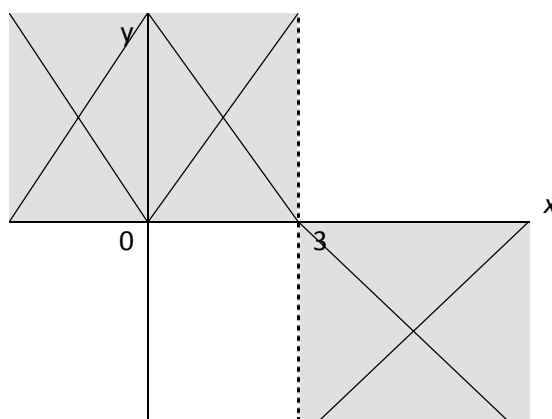
Esempio 2: $y = 2^x - 8$

$$2^x - 8 > 0 \rightarrow 2^x > 8$$

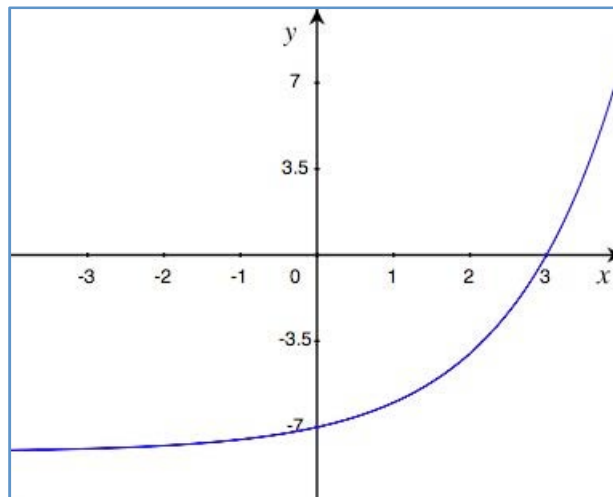
Ora poiché $2^x = 8 \rightarrow x = 3$ e, poiché al crescere di x , 2^x cresce (ciò che accade sempre quando la base è maggiore di 1) sarà $2^x > 8$ quando $x > 3$.

In conclusione si ha che la funzione: è positiva per $x > 3$, negativa per $x < 3$ ed uguale a 0 per $x = 3$.

Riportiamo tali esiti sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



La funzione passa tra il punto (3 ; 0)

Esempio 3: $y = (x - 1)e^{5x}$

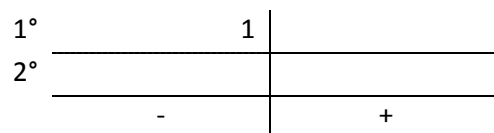
e è il numero di Nepero ($e = 2,718 \dots$, numero irrazionale).

Siccome la funzione è il prodotto delle due funzione $x - 1$ e di e^{5x} e fare il grafico dei segni.

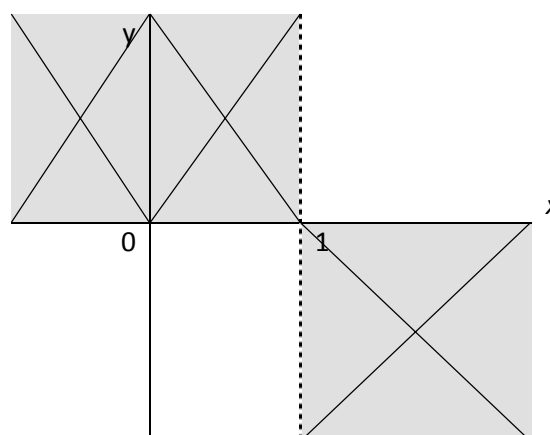
1° $x - 1 \geq 0 \quad x \geq 1$

2° $e^{5x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (come già osservato precedentemente)

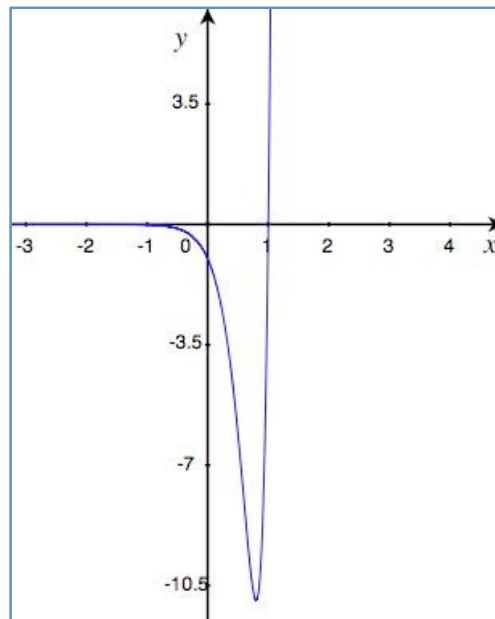
Pertanto si ha:



Riportiamo i risultati sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



La funzione passa per il punto $P \equiv (1; 0)$.

Esempio 4: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 9$

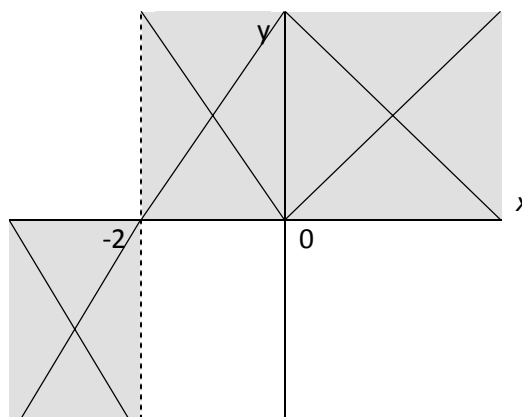
Ricordiamo che quando a è un numero maggiore di 0 e minore di 1, allora a^x diventa sempre più piccolo all'aumentare di x . Pertanto, poiché

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^2 \rightarrow x = -2$$

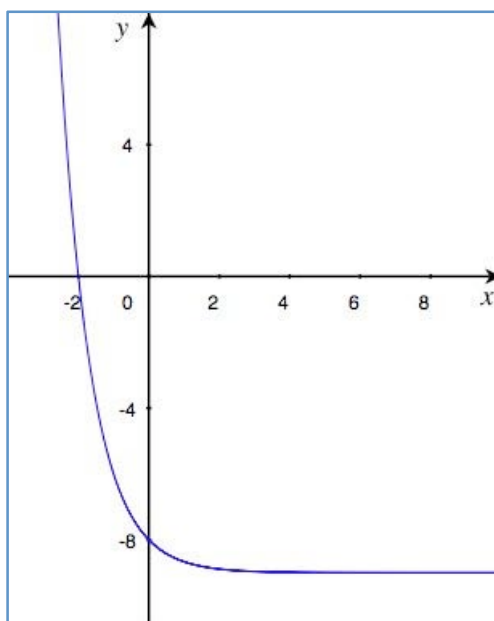
Si avrà

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \text{ quando } x < -2$$

Riportando ciò nel piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



FUNZIONI GONIOMETRICHE

Ricordiamo che :

- 1) la funzione $y = \sin x$ è periodica con periodo uguale a 2π e che è positiva per $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ e negativa per $(2k - 1)\pi < x < 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ (positiva nel semipiano delle ordinate positive e negativa in quello delle ordinate negative).
- 2) la funzione $y = \cos x$ è periodica con periodo uguale a 2π ed è positiva per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mentre è negativa per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ (positiva nel 1° e 4° quadrante e negativa nel 2° e 3°).
- 3) La funzione $y = \operatorname{tg} x$ è periodica con periodo uguale a π ed è positiva per $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ e negativa per $(2k + 1)\frac{\pi}{2} < x < (k + 1)\pi$ (positiva nel 1° e 3° quadrante e negativa nel 2° e 3°).
- 4) La funzione $y = \operatorname{cotg} x$ è la funzione reciproca di $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$), quindi ha lo stesso segno di $\operatorname{tg} x$.

Esempio 1 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

Per quanto detto poco fa, $\sin(2x + \frac{\pi}{2})$ è positiva se $2k\pi < 2x + \frac{\pi}{2} < (2k + 1)\pi$

Per individuare i valori delle x in corrispondenza dei quali la funzione è positiva bisogna risolvere le due disequazioni:

$$2k\pi < 2x + \frac{\pi}{2} \quad 2x + \frac{\pi}{2} < (2k + 1)\pi$$

Dalla prima si ha:

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x \rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < x \rightarrow (4k - 1) \frac{\pi}{4} < x$$

Dalla seconda si ha:

$$2x < 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x < k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x < (4k + 1) \frac{\pi}{4}$$

Pertanto $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ risulta positiva quando

$$(4k - 1) \frac{\pi}{4} < x < (4k + 1) \frac{\pi}{4}$$

ed è, invece, negativa se

$$(2k - 1)\pi < 2x + \frac{\pi}{2} < 2k\pi$$

Risolvendo la disequazione

$$(2k - 1)\pi < 2x + \frac{\pi}{2}$$

si ottiene

$$2k\pi - \pi - \frac{\pi}{2} < 2x \rightarrow 2k\pi - \frac{3}{2}\pi < 2x \rightarrow k\pi - \frac{3}{4}\pi < x \rightarrow (4k - 3) \frac{\pi}{4} < x$$

e risolvendo la

$$2x + \frac{\pi}{2} < 2k\pi$$

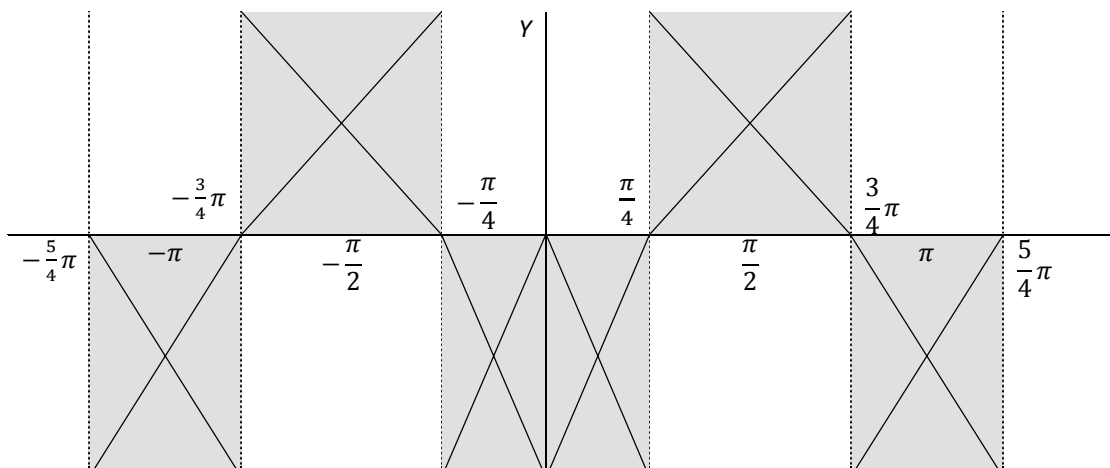
si ha

$$2x < 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x < k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x < (4k - 1) \frac{\pi}{4}$$

Pertanto il segno negativo si ha quando

$$(4k - 3) \frac{\pi}{4} < x < (4k - 1) \frac{\pi}{4}$$

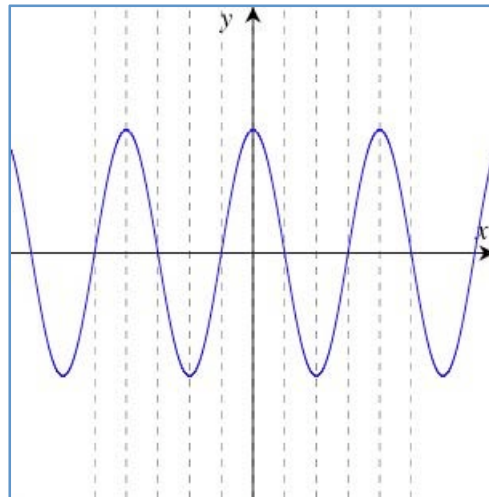
Segue il grafico del segno:



La funzione si annulla nei punti

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{4} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il grafico della funzione è



Esempio 2 $y = \cos(-x + \frac{\pi}{6})$

Per quanto detto in precedenza, $\cos(x)$ è positiva quando $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < -x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

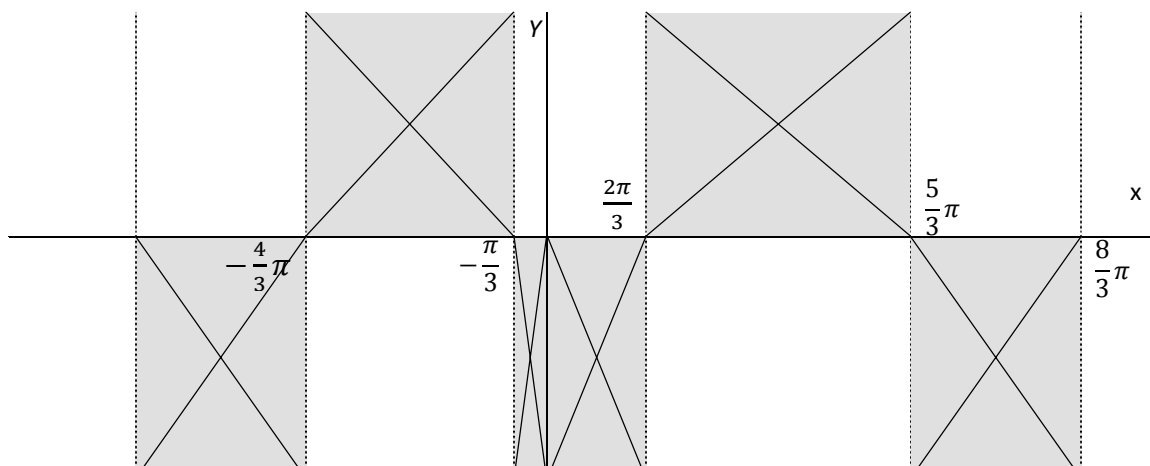
Da $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < -x + \frac{\pi}{6}$ si ricava $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < -x \rightarrow -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < -x \rightarrow \frac{2}{3}\pi - 2k\pi > x$

Da $-x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ si ha $-x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow -x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x > -\frac{\pi}{3} - 2k\pi$

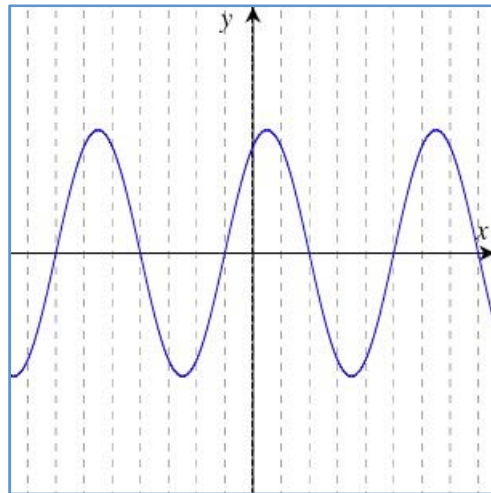
Dunque $\cos(-x + \frac{\pi}{6})$ è positiva per

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Il grafico del segno è il seguente



Il grafico della funzione è



Esempio 3 $y = \text{tg}(3x)$

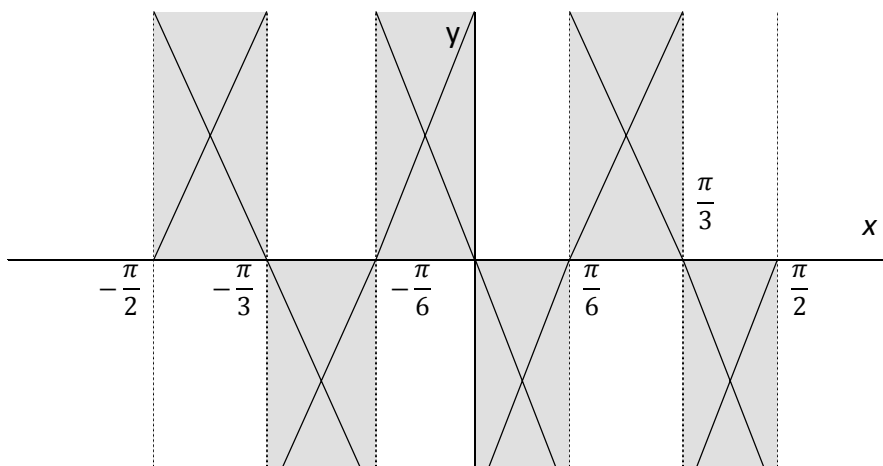
$\text{tg}(3x)$ è positiva quando per $k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Quindi $k\pi < 3x \rightarrow \frac{k\pi}{3} < x$ e $3x < \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

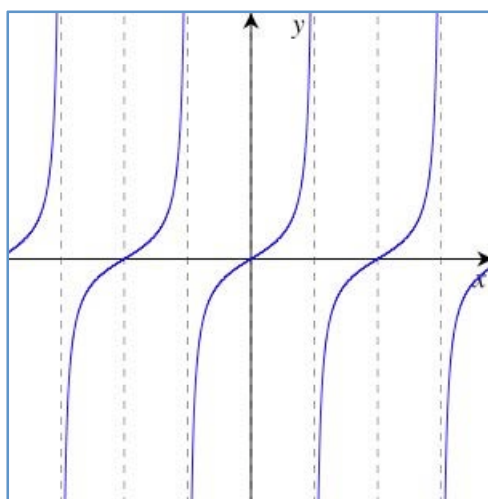
Pertanto $\text{tg}(3x)$ è positiva quando

$$k\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Il grafico dei segni è il seguente



Il grafico della funzione è



La funzione si annulla nei punti $x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.