LE PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

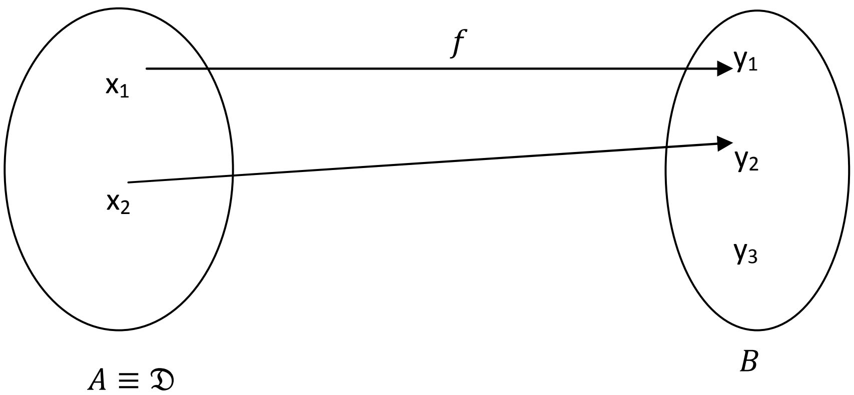
Ora che sappiamo cos'è una funzione possiamo verificare se la funzione che stiamo studiando ha alcune qualità. Queste qualità ci permetteranno di aggiungere un oggettivo alla funzione e di capirne meglio il suo grafico.

1° proprieta': l'iniettivita'

Definzione
Una funzione è iniettiva se: per ogni elemento x di A≡D tale che $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$ cioè $y_1 \neq y_2$.

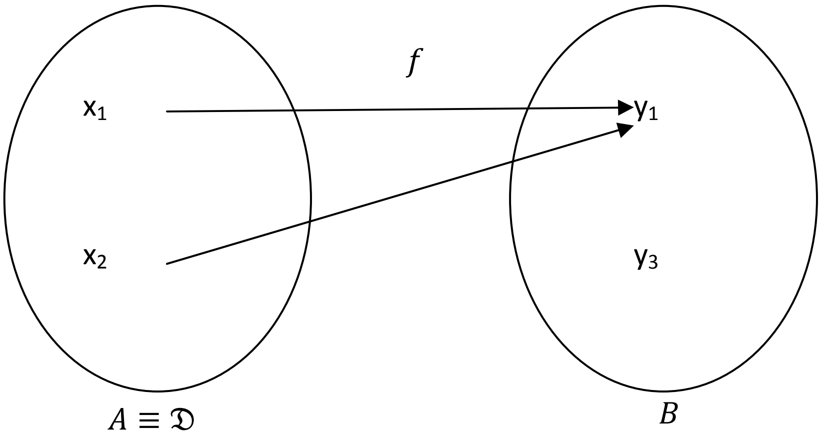
Vediamo questa proprietà usando gli insiemi di Venn:

f é iniettiva

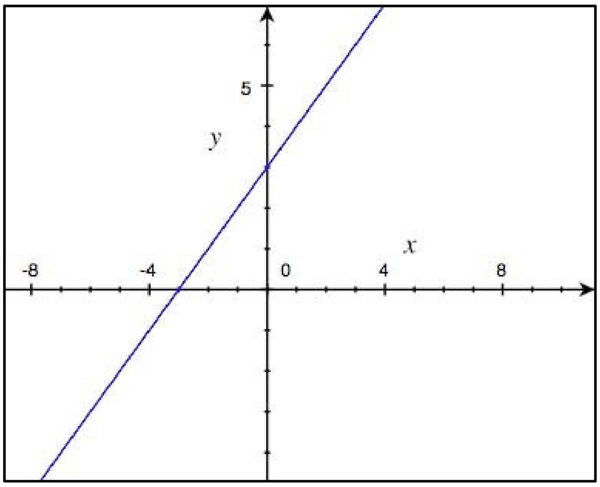


In *B possono esserci elementi che non sono immagini di x*

f non è iniettiva

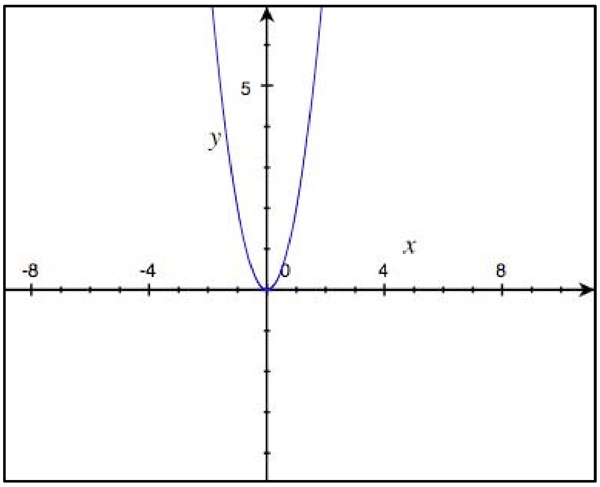


Esempio 1: $y = x + 3$



x_1=1 $f(x_1) = 4$
x_2=2 $f(x_2) = 5$
Dato che $\forall x \in \mathcal{D}$ quando $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè la funzione è iniettiva.

Esempio 2: $y = 2x^2$

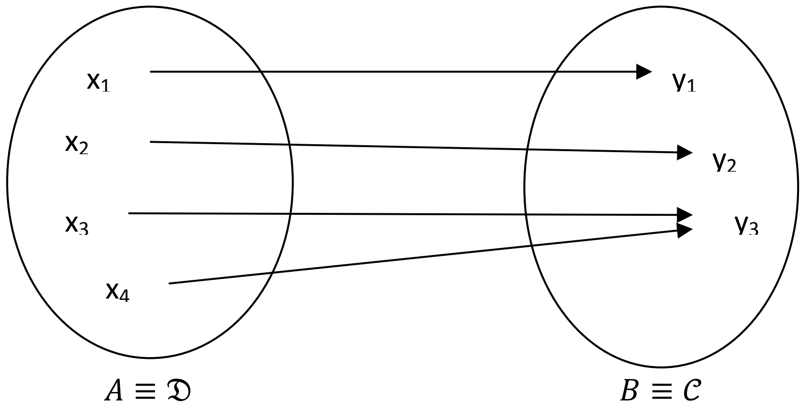


x_1=1 y_1=2
x_2=-1 y_2=2
Dato che esistono almeno 2 valori di *x* ai quali viene associato lo stesso valore *y*, la funzione non è iniettiva.

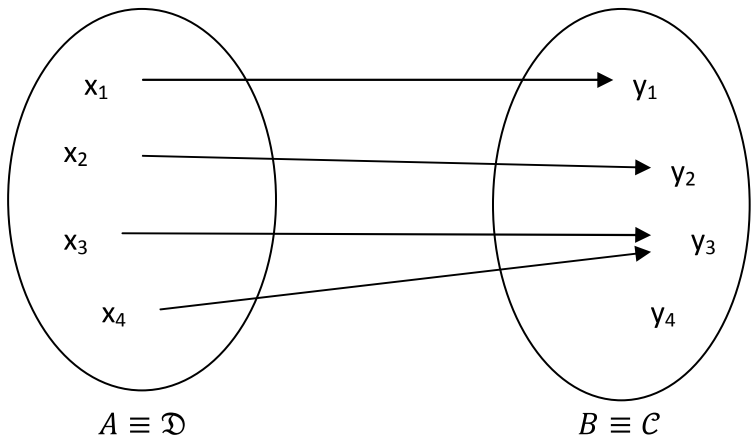
2° proprieta': la suriettivita'

Definizione
Una $f(x)$ è suriettiva se ogni elemento in B è immagine di almeno un elemento di $A \equiv \mathcal{D}$.

Vediamo questa proprietà usando gli insiemi di Venn:

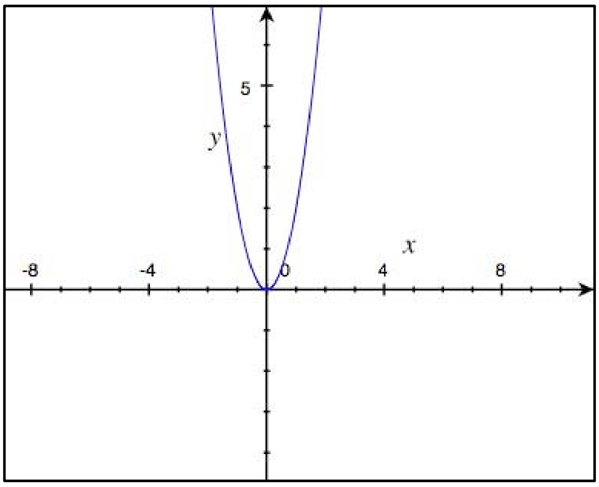


$f(x)$ è suriettiva



$f(x)$ non è suriettiva perchè esistono elementi in B che non sono immagini di x

Esempio 1: $y = 2x^2$



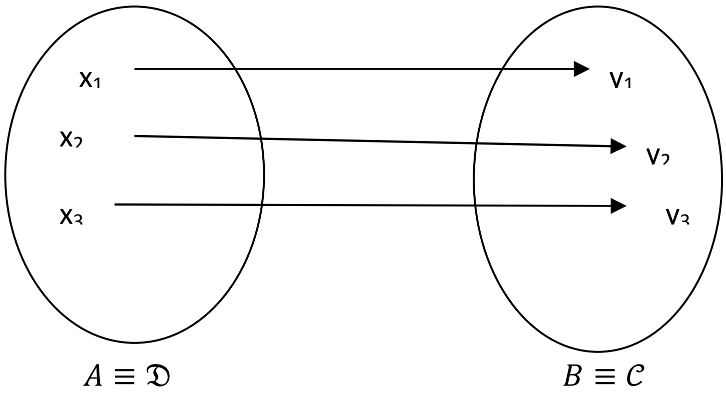
Se considero come Codominio della $f(x)$:
$\mathcal{C} \equiv \{\forall y \in R: y \geq 0\}$, allora $f(x)$ è surriettiva perché ogni valore y è immagine di almeno un valore x . Infatti ad esempio:

$$y = 2 \leftarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \qquad y = 1 \leftarrow \begin{cases} x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad y = 0 \leftarrow x = 0$$

Osservo pero' che se avessi scelto come Codominio $\mathcal{C} \equiv \{\forall\ y \in R\}$, non esisterebbe ad esempio alcun x associato a $y = -1$, cioè $y = -1$ non è immagine di alcun *x*. Scoprirei che la funzione dell'esempio 1 non è suriettiva in quel Codominio perché esiste almeno il valore $y = -1$, che non è immagine di nessuna *x.*
Posso percio' concludere che la proprietà di suriettività è strettamente in relazione con il Codominio della funzione. Dovro' quindi calcolare caso per caso il Codominio della $f(x)$ e poi stabilire se la funzione gode della proprietà di suriettività o no.

3° proprieta': la biiettivita' o biunivocita'

Definizione
Una funzione è biettiva se è iniettiva e suriettiva allo stesso tempo.



$f(x)$ è biiettiva

Osservazione
Se una funzione $f\colon\ A \longrightarrow B$ è biiettiva, allora esiste la sua funzione inversa detta $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$, tale che ad ogni elemento *y* dell'insieme B associa un valore *x* nell'insieme A, cioè $x = f^{-1}(y)$.

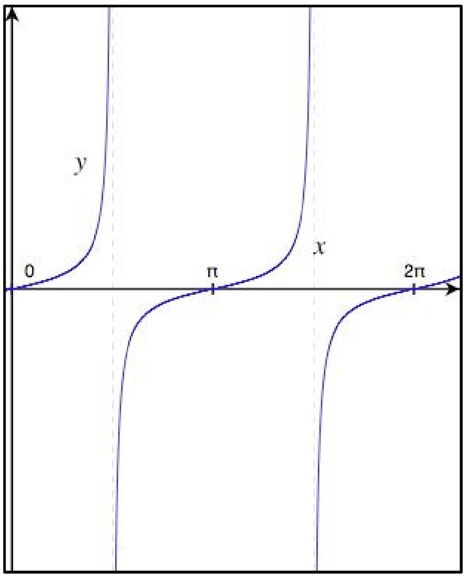
4° proprieta': crescenza e decrescenza

Definizione

La f*(x) e'* *crescente* *se* $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{D} con\ x_1 < x_2$ *si ha che* $f(x_1) \leq f(x_2)$.

La f*(x) e'* *decrescente* *se* $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{D}\ con\ x_1 < x_2$ *si ha che* $f(x_1) \geq f(x_2)$.

esempio 1 : ***y = tgx***



Prendiamo 2 valori $x_1\ e\ x_2$ tali che $x_1 < x_2$ ad esempio:

x_1*=30°* *f(*x_1*)=*$\frac{\sqrt{3}}{3}$

x_2*=60°* *f(*x_2*)=*$\sqrt{3}$

Osservo che *: f(*x_1*)<* $f(x_2)$*.*

Se prendo altri valori di x, osservo che se $x_1 < x_2$ allora si ha sempre $f(x_1) < f(x_2)$, cioè la ***funzione è crescente***.

Se $\forall x_{1,} x_2 \in \mathfrak{D}\ con\ x_1 < x_2$, si ha *f(*$x_1$*)* $< f(x_2)$ *,* allora si dice che *f(x)* é **monotona strettamente crescente**.

Se invece $\forall\ x_{1,} x_2 \in \mathfrak{D}\ con\ x_1 < x_2$, si ha che *f(*$x_1$) $\leq f(x_2)$ allora *f(x)* é crescente, ma diremo **monotona crescente**. Nell'esempio 1 la funzione è **monotona crescente.**

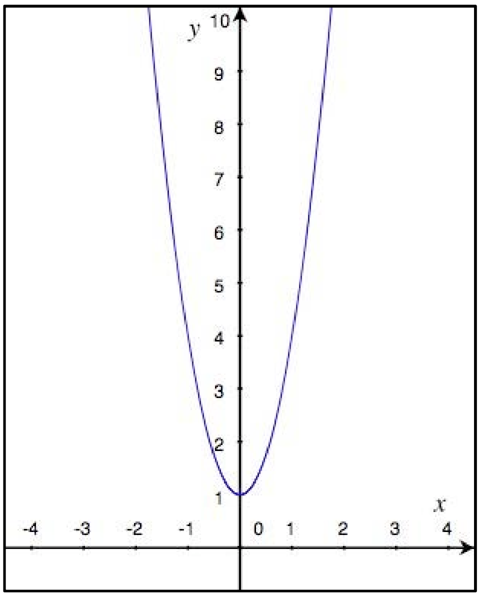
5° proprieta' : la simmetria

Definizione
Una funzione è simmetrica se $\forall x \in \mathfrak{D}$:
$f(x) = f(-x)$, in questo caso la siimetria è rispetto all'asse delle y e la funzione si dice pari
$f(x) = -f(-x)$, in questo caso la simmetria è rispetto all'origine e la funzione si dice dispari

Osservazione
Una funzione ha simmetria pari quando il suo grafico a destra e a sinistra dell'asse delle Y è speculare. Cioè disegnato il grafico a destra dell'asse delle y ($x > 0$), il grafico a sinistra ($x < 0$), si ottiene con un ribaltamento del grafico rispetto all'asse Y.

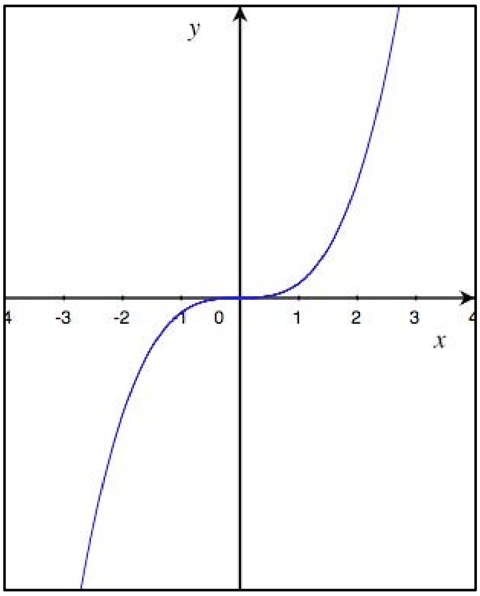
Una funzione ha simmetria dispari quando disegnato il suo grafico a destra dell'asse delle y ($x > 0$), il grafico a sinistra ($x < 0$ si ottiene con un doppio ribaltamento. Il primo ribaltamento è rispetto all'asse Y ed il secondo è rispetto all'asse delle x negative. Questo doppio ribaltamento, viene definito come ribaltamento rispetto all'origine degli assi cartesiani e percio' in questo caso la funzione di dice simmetrica rispetto all'origine.

Esempio 1: $y = 3x^2 + 1$



Essendo una funzione polinomiale: $\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$.
Verifichiamo se la funzione è pari. $\forall x \in \mathfrak{D}$, f(x) è uguale a $f(-x)$?
$f(x) = \mathbf{3x^2 + 1}$ e $f(-x) = \mathbf{3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1.}$
La funzione è **pari** perché $\forall x \in \mathfrak{D}$ si ha che $f(x) = f(-x)$.

Esempio 2: $y = \frac{x^3}{2}$



Anche questa è una funzione polinomilale e il suo dominio è $\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$.
Verifichiamo se la funzione è pari. $\forall x \in \mathfrak{D}$, $f(x)$ è uguale a $f(-x)$?

$f(x) = \frac{x^3}{2}$ e $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2} = \frac{-x^3}{2}$

La funzione non è **pari** perché $\forall x \in \mathfrak{D}$ si ha che $f(x) \neq f(-x)$.

Verifichiamo se la funzione è dispari. $\forall x \in \mathfrak{D}$, $f(x)$ è uguale a $-f(-x)$?

$f(x) = \frac{x^3}{2}$, $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2} = \frac{-x^3}{2}$ e $-f(-x) = -\frac{(-x)^3}{2} = \frac{x^3}{2}$

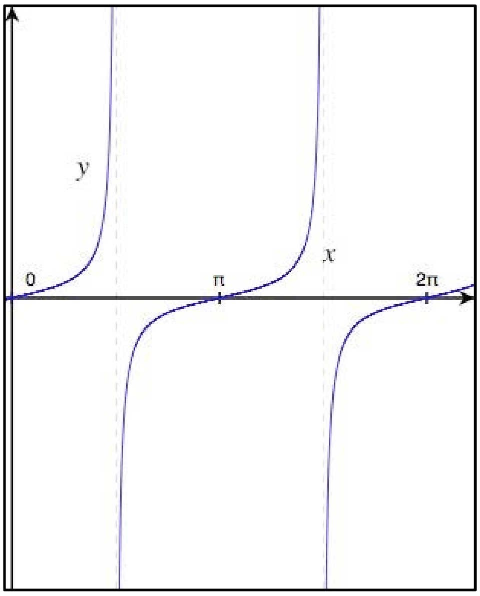
La funzione è **dispari** perché $\forall x \in \mathfrak{D}$ si ha che $f(x) = -f(-x)$.

6° proprieta' : la periodicita'

Definizione
Una funzione è periodica di periodo T se il suo grafico si ripete dopo un intervallo T sull'asse X.

In generale se la funzione è periodica con T >0, possiamo scrivere:
$f(x) = f(x + kT)$ dove k è un qualsiasi numero intero.

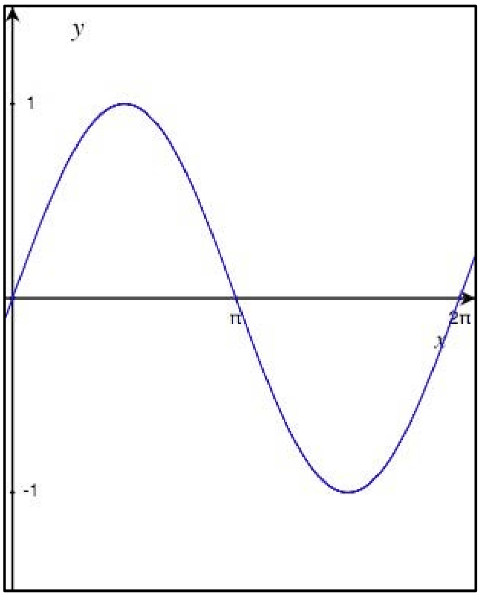
Esempio 1: *y = tgx*



Come si osserva dal grafico, la funzione trigonometrica **y = tgx** , riprende gli stessi valori dopo un intervallo di 180° sull'asse delle x. Il periodo della funzione è T= 180° o T= π.
Possiamo quindi scrivere $\forall x \in \mathfrak{D}$:

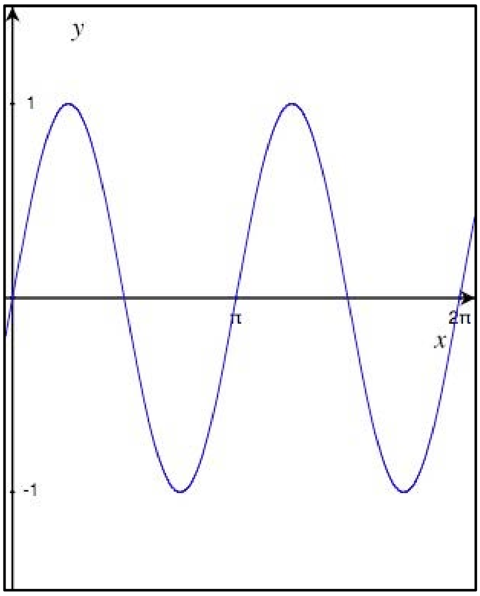
$$tg(x) = tg(x + k180°)$$

Esempio 2: $y = senx$



Come si osserva dal grafico, la funzione trigonometrica $\boldsymbol{y = senx}$, riprende gli stessi valori dopo un intervallo di 360° sull'asse delle x. Il periodo della funzione è T= 360° o T= 2π.
Possiamo quindi scrivere $\forall x \in \mathfrak{D}$:
$sen(x) = sen(x + k\ 360°)$

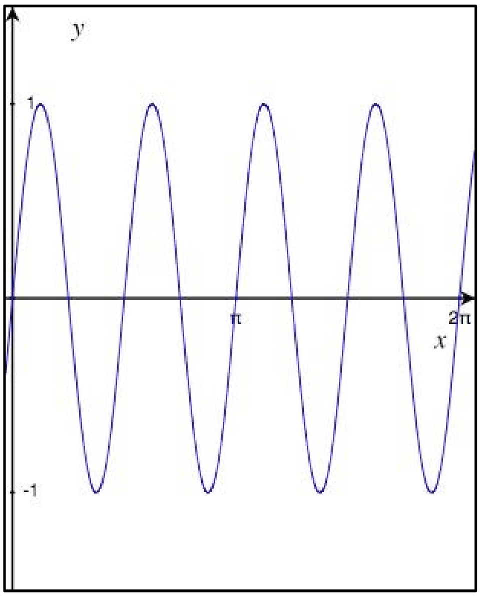
Esempio 3: $y = sen\ 2x$



Come si osserva dal grafico, la funzione trigonometrica $\boldsymbol{y = sen\ 2x}$, riprende gli stessi valori dopo un intervallo di 180° sull'asse delle *x*. Il periodo della funzione è T= 180° o T= π.
Possiamo quindi scrivere $\forall x \in \mathfrak{D}$:

$$sen(2x) = sen(2x + k\ 180°)$$

Esempio 4: $y = sen\, 4x$



Come si osserva dal grafico, la funzione trigonometrica $\boldsymbol{y = sen\, 4x}$, riprende gli stessi valori dopo un intervallo di 90° sull'asse delle *x*. Il periodo della funzione è T= 90° o T=$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$. Possiamo quindi scrivere:

$$sen(4x) = sen(4x + k\ 90°)$$