LE FUNZIONI

Definizione
In generale si definisce *funzione* una relazione che associa ad ogni elemento di un certo insieme di partenza uno e un solo elemento nell'insieme di arrivo.

E' una funzione la legge che associa ad Asmara in ogni giorno dell'anno la temperatura media misurata. E' una funzione le legge che associa a ogni studente della classe 4A del Liceo "G.Marconi" di Asmara la sua età anagrafica. Mentre negli esempi ora citati le funzioni sono relazioni che lavorano fra insiemi tempo-temperatura e studenti-età, in queste schede ed in generale dal punto di vista dell'Analisi Infinitesimale, ci occuperemo sempre di ***funzioni matematiche*** definite come funzioni reali di variabile reale, dove cioè l'insieme di partenza e di arrivo della funzione sono insiemi numerici.
Infiniti sono pero' gli esempi di funzioni che possiamo descrivere mettendo in relazione grandezze fisiche o anche solo osservando la nostra vita quotidiana.

LE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

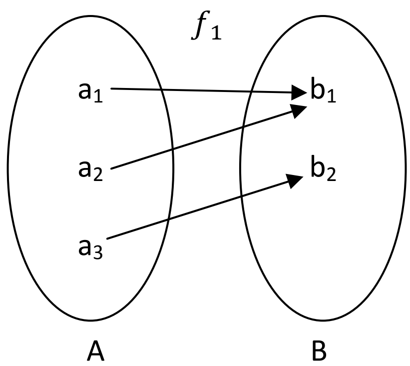
Definizione
Dati due insiemi A e B (non vuoti) $\subseteq \mathbb{R}$, una funzione f reale di variabile reale è una relazione che associa ad ogni numero reale in A uno ed un solo numero reale in B.

Come si scrive la relazione di funzione fra A e B ?

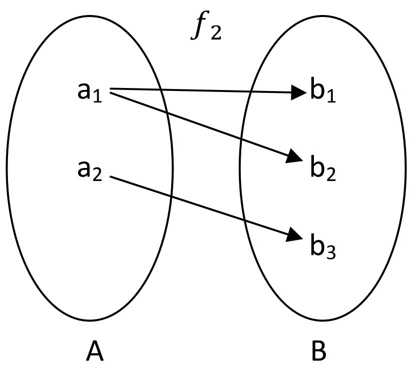
Si scrive così:

$$f:\ A \longrightarrow B$$

dove "f" è minuscola e rappresenta la funzione, A è l'insieme degli elementi su cui agisce la f, cioè gli elementi di partenza " x ", e B rappresenta l'insieme di arrivo o anche delle immagini $y = f(x)$ degli elementi x tramite la f .
Vediamo due esempi di relazioni fra insiemi usando le rappresentazioni degli insiemi di Venn:



f_1 è una funzione perché ogni elemento di A ha immagine in un unico elemento di B



f_2 non e' una funzione perché a_1 ha immagine in due elementi di B

Esempio

Esaminiamo i seguenti esempi di rette e curve rappresentabili nel riferimento cartesiano *OXY*:
a) la retta: $y = x + 3$
b) la parabola: $y = 2x^2$
c) la circonferenza: $x^2 + y^2 = 4$
Sono esempi di funzioni?

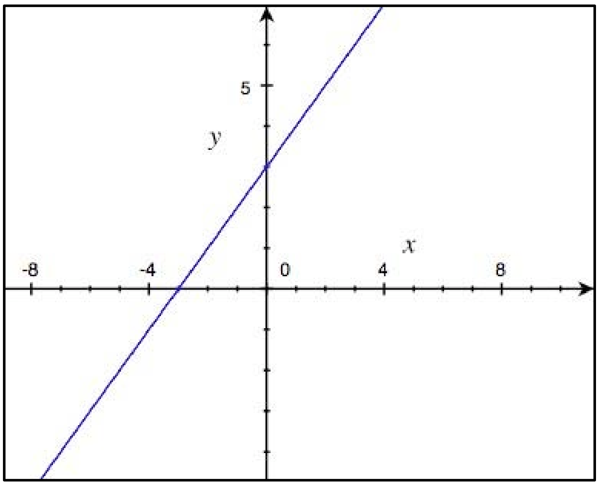


grafico a)

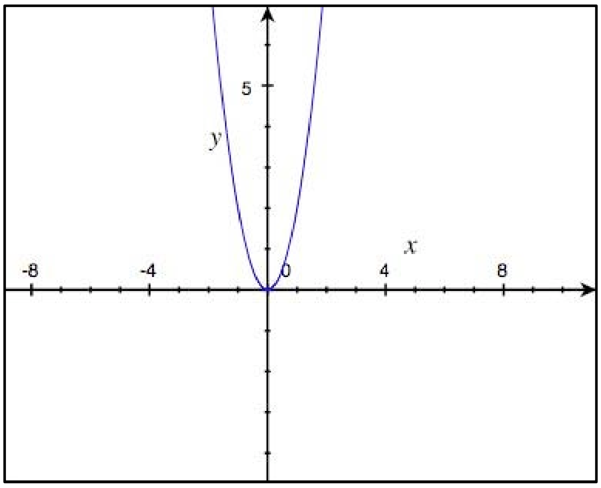


grafico b)

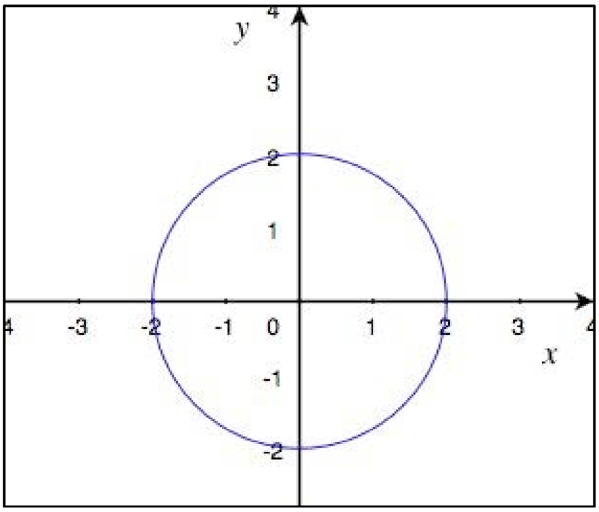


grafico c)

a) e b) sono funzioni perché ad ogni elemento di *x* è associata uno e un solo elemento *y*.
c) non è una funzione perché esistono elementi *x* a cui sono associati due valori distinti *y*. Questo accade per esempio per ogni un elemento x $\in \,]0,2[$.

Cosa è A? Definiamo A o Dominio di $f(x)$

A è detto Dominio di $f(x)$ o anche Campo di Esistenza di $f(x)$ e si indica con D $(A \equiv D)$.
D è $\subseteq$ $\mathbb{R}$ a seconda della funzione che stiamo studiando.

Definizione
Il Dominio D della $f(x)$ è l'insieme dei valori che si possono dare alla x affinché si possa calcolare la y e il valore trovato sia finito (cioè $y \neq \pm\infty$).

Generalmente il ***Dominio di f***$(\boldsymbol{x})$ si scrive : $\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \in \ \mathbb{R} : \ldots \ldots \ldots\}$
cioè il dominio è un'insieme e per questo si scrive fra 2 parentesi $\mathfrak{D} \equiv \{\ldots \ldots\}$ dove, la scrittura puo' essere cosi' tradotta:
"$\mathfrak{D}$ *equivale* ($\equiv$) *all'insieme* $\{\ldots\}$ *formato da ogni* $(\forall)$ *elemento* x *appartenente* $(\in)$ *all'insieme dei numeri reali* $(\mathbb{R})$ *,tale che* $(:)$*, ………..”* e si sostituiscono i puntini con la condizione necessaria da scegliere caso per caso. Vedremo fra poco come.
Il Dominio di $f(x)$, essendo formato da elementi x, lo rappresenteremo in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *OXY*, sull'asse delle ascisse o asse X.

Esempio 1

Calcolare il dominio di $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}$
Sappiamo dalla definizione appena studiata che il dominio è l'insieme di valori che posso dare a x affinché (x) sia calcolabile e sia $\neq \ \pm\infty$.
Provo a dare dei valori alla x e calcolo la $f(x)$ associata:

$x = 1 \quad \longrightarrow \ y = \frac{1}{1} = 1 \qquad x = \ 1 \ \in \mathfrak{D}$

$x = -1 \ \longrightarrow \ y = \frac{1}{-1} = -1 \qquad x = -1 \ \in \mathfrak{D}$

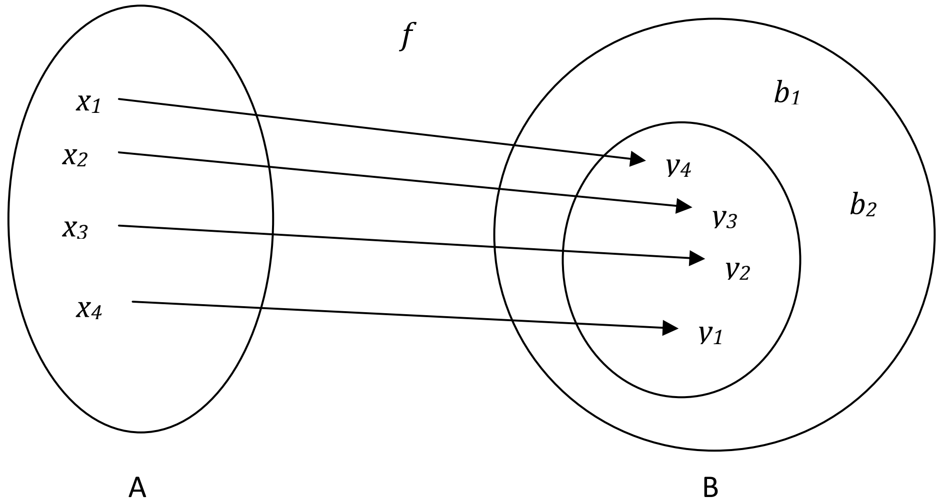
$x = 0 \quad \longrightarrow \ y = \frac{1}{0} = \infty \qquad x = 0 \quad \notin \mathfrak{D}$

Trovo un solo valore di x che non appartiene al dominio. Il dominio di $f(x)$ è:
$\mathfrak{D} \ \equiv \ \{\forall \ x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \ \equiv \ ]-\infty, 0[\ \cup \ ]0, \infty[$

L'insieme B

Definizione
L'insieme B è $\subseteq$ $\mathbb{R}$ e può essere formato dalle immagini degli elementi che provengono da A e da altri elementi che erano già in B.

Vediamo come si puo' rappresentare l'insieme B usando la grafica di Venn. Gli elementi y, immagini di x, possono occupare solo una parte dell'insieme B:



Il codominio di $f(x)$

Definizione
Il codominio della $f(x)$ è l'insieme delle immagini $y = f(x)$ degli elementi x attraverso la funzione .

L'insieme degli elementi Y $\subseteq$ B si chiama Codominio della f( ) .
Generalmente il Codominio di $f(x)$ si scrive: $\mathcal{C} \equiv \{\forall y \in \mathbb{R} : \ldots \ldots \ldots\}$.
Anche il codominio è un'insieme e per questo si scrive fra 2 parentesi C $\equiv \{\ldots \ldots\}$
dove :
"$\mathcal{C}$ equivale ($\equiv$) all'insieme $\{\quad\}$ *formato da ogni* ($\forall$) *elemento* y *appartenente* ($\in$) *all'insieme dei numeri reali* ($\mathbb{R}$) *,tale che* (:)*, ..."* e si sostituiscono i puntini con la condizione necessaria da scegliere caso per caso.
Il Codominio essendo formato da elementi y si rappresenta in un sistema cartesiano ortogonale *OXY* sull'asse delle ordinate o asse *Y.*

LA CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE E IL CALCOLO DEL DOMINIO DI $f(x)$

Le ***funzioni matematiche*** si suddividono in:

- ***algebriche*** : razionali intere, razionali fratte, irrazionali;
- ***trascendenti***: esponenziali, logaritmiche, goniometriche.

Il calcolo del Dominio dipende da quale tipo di funzione stiamo analizzando.

a) Funzioni razionali intere
y= $ax^n + bx^{n-1}$+….+ z con *a, b,…, z* $\in \mathbb{R}$ e *n* $\in \mathbb{N}$
Per questo tipo di funzioni il dominio è sempre :
$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$

Ad esempio la funzione $y = 5x^3 + 3x$ ha dominio $\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$

b) Funzioni razionali fratte
In questo tipo di funzioni il dominio si calcola caso per caso, imponendo la condizione che il denominatore sia $\neq 0$.
Ad esempio per calcolare il Dominio della funzione y= $\frac{1}{(x^2-1)}$ procedo in questo modo:

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0\} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}: x \neq \pm 1\} \equiv]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[$$

c) Funzioni irrazionali
Per calcolare il dominio di queste funzioni si distinguono 2 categorie principali:
1- Funzioni con indice della radice dispari
2- Funzioni con indice della radice pari

1- Per le funzioni con indice della radice dispari, dato che qualsiasi sia il segno del radicando il calcolo della radice è sempre possibile, il Dominio della funzione è :

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall \mathrm{x} \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$

Ad esempio il dominio di y= $\sqrt[3]{x-4}$, essendo la radice di indice 3 dispari:

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$

2- Per le funzioni con indice della radice pari, la condizione che permetterà di calcolare la $f(x)$ è che il radicando sia ≥ 0. Il dominio si calcolerà caso per caso.

Ad esempio per il calcolo del Dominio di y= $\sqrt{x-4}$, essendo la radice di indice 2 pari, si procede così:

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}: x - 4 \geq 0; x \geq 4\} \equiv [4, \infty[$$

d) Funzioni esponenziali
Le funzioni esponenziali possono essere calcolate per qualsiasi valore della x, il loro Dominio è :

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$

e) Funzioni logaritmiche
I logaritmi non sono definiti per valori di $x < 0$. Il dominio si deve allora calcolare caso per caso imponendo la condizione che l'argomento del logaritmo sia positivo.

f) <u>Funzioni goniometriche</u>

1- Funzione $y = sen\, x$

2- Funzione $y = \cos x$

3- Funzione $y = tg\ x$

Per le funzioni dei tipi 1 e 2, dato che qualsiasi valore si dia alla x si puo' sempre calcolare la y, il dominio è:

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$

Per la funzione $y = tg\ x$, dato che nel periodo $[0{,}360°]$ la funzione non è definita in x= 90° e x= 270°, il dominio è:

$$\mathfrak{D} \equiv \{\forall x \epsilon \mathbb{R} : x \neq 90°\ e\ x \neq 270°\} \equiv\ [0°, 90°[\ \cup\ ]90°, 270°[\ \cup\ ]270°, 360°]$$