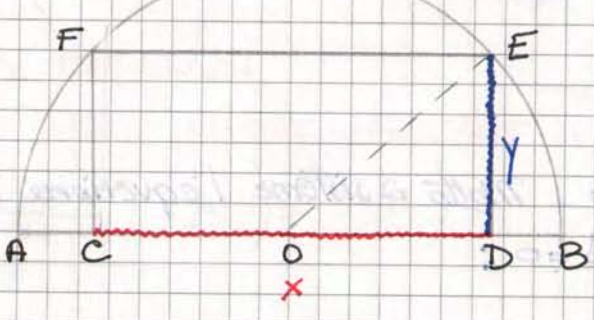
In un semicerchio di diametro $\overline{AB} = 2r$, inscrivere un rettangolo di perimetro $2p$.

$\overline{AB} = 2r$

$2\overline{FC} + 2\overline{FE} = 2p.$



Pongo: $\overline{CD} = x$; $\overline{ED} = y$

Utilizzando la relazione datami dal problema, mi trovo la prima relazione del sistema misto:

$$x + y = p$$ (⇒ equazione di un fascio improprio di rette)

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ODE, mi trovo la seconda relazione del sistema misto:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = r^2$$ (⇒ equazione di un'ellenisse)

che posta in forma canonica, diventa:

$$\frac{x^2}{4r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

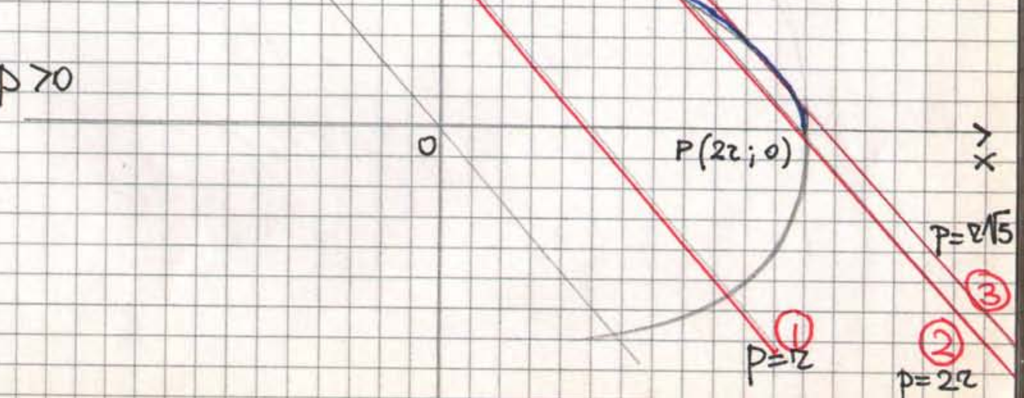
I limiti del sistema sono:

$0 \le x \le 2r$

$0 \le y \le r$

Sistema misto:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = r^2 \\ x + y = p \\ 0 \le x \le 2r \ ; 0 \le y \le r \ ; \ p > 0 \end{cases}$$



I° CASO:

la retta passa per il punto $Q(0;r)$:

$$r=p$$

II° CASO:

la retta passa per il punto $P(2r;0)$:

$$2r=p$$

III° CASO:

la retta è tangente alla curva _ Metto a sistema l'equazione dell'ellisse e quella della retta, con il $\Delta=0$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=r^2 \\ x+y=p \end{cases}$$

Eliminiamo la y ottenendo l'equazione di secondo grado in x:

$$x^2+4(p-x)^2-4r^2=0;$$

$$5x^2-8px+4p^2-4r^2=0;$$

$\Delta=0$; $16p^2-20(p^2-r^2)=0$; $p=\pm r\sqrt{5}$ prendiamo solo il valore positivo in quanto l'ellisse è situata nel I° quadrante che ha valori positivi.

Discussione del sistema misto:

Per $p<r$ nessuna soluzione

Per $p=r$ una soluzione limite; $x=0$; $y=r$

Per $r<p<2r$ una soluzione ordinaria

per $p=2r$ due soluzioni (una limite, una ordinaria)

per $2r<p<r\sqrt{5}$ due soluzioni ordinarie

per $p=r\sqrt{5}$ due soluzioni coincidenti

per $p>r\sqrt{5}$ nessuna soluzione