

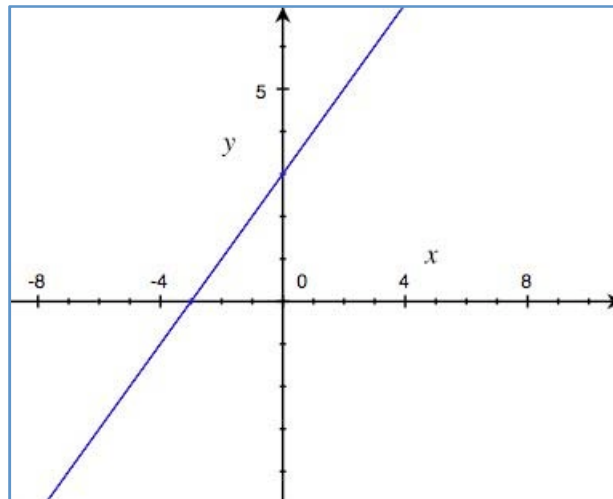
ESERCIZI SULLE FUNZIONI

COSA È UNA FUNZIONE?

1. *Esercizio facile*

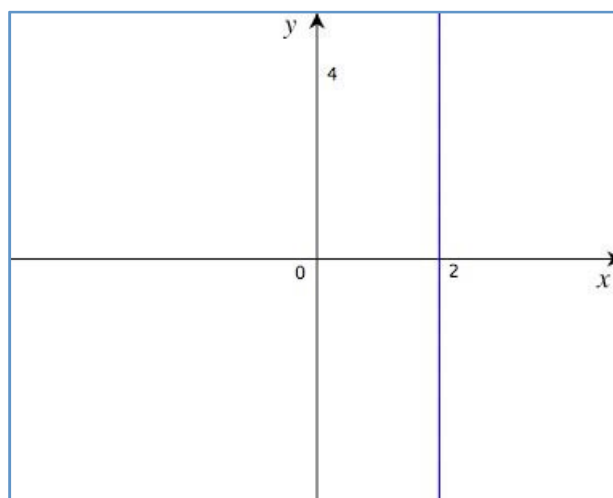
$$y = x + 3 \quad (\text{funzione lineare})$$

È una funzione perché ad ogni numero reale di x è associato un solo numero reale di y . Questo lo possiamo capire dal grafico e dall'equazione, perché è l'equazione di una retta del tipo $y = mx + q$.



Le rette associano ad ogni x un unico y .

Osservazione: se abbiamo una retta parallela all'asse y , ad ogni x è associata più di una y . Tali rette non sono funzioni. Ad esempio la retta $x = 4$

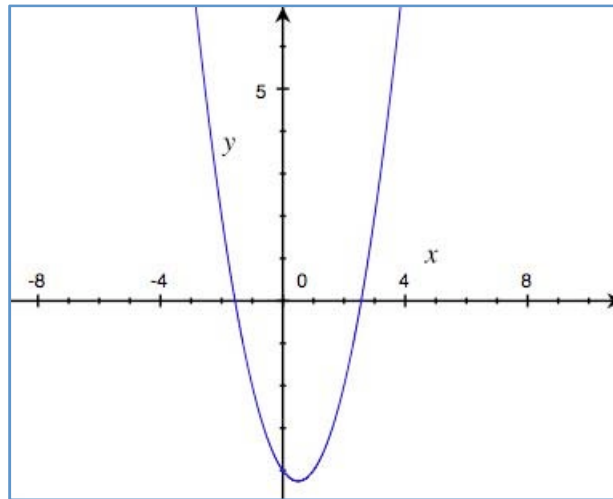


2. Esercizi intermedi

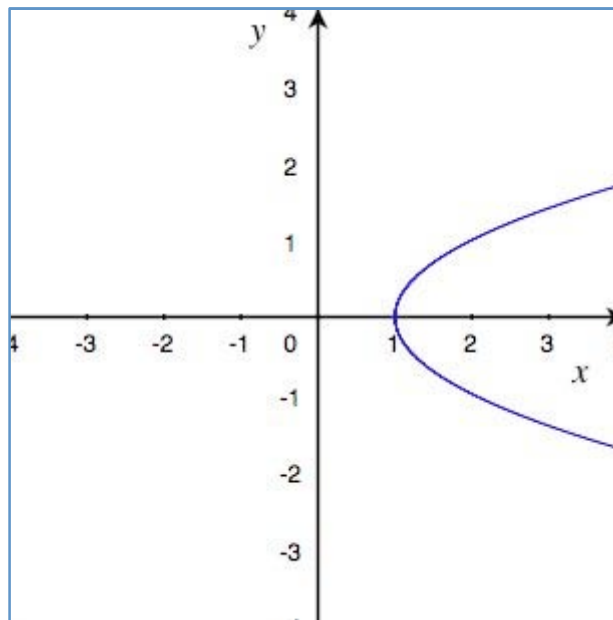
a) $y = x^2 - x - 4$ (funzione quadratica)

Anche in questo caso possiamo capire che è una funzione senza effettuare il grafico dell'equazione Perché è un'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Le parabole sono delle funzioni nelle quali a ogni x è associato un y , dove però a ogni y della funzione corrispondono più di una x (due valori di x).

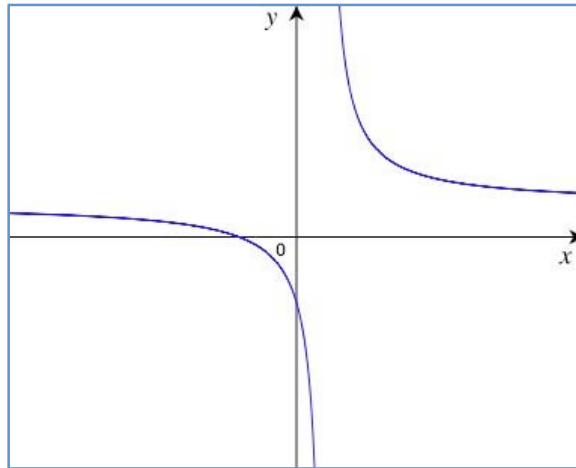


Osservazione: La parabola non è una funzione solo quando ha l'asse parallelo all'asse X. Ad esempio l'equazione $x = y^2 + 1$ non è una funzione.



b) $y = \frac{x+1}{2x-1}$ (funzione fratta - frazione algebrica)

E' una funzione fratta. Se abbiamo un'equazione del genere, per capire se è una funzione, bisogna prima fare il grafico per vedere se è una funzione.



Questo è una funzione perché a ogni x è associata un unico y .

3. Esercizio difficile

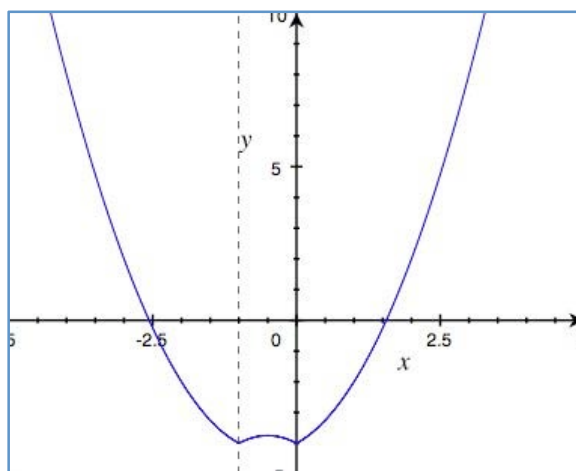
a) $y = |x^2 + x| - 4$ (funzione valore assoluto)

E' una funzione valore assoluto che si sviluppa nella seguente maniera

$$y = f(x) = \begin{cases} \text{se } x^2 + x \geq 0 & y = x^2 + x - 4 \\ \text{se } x^2 + x < 0 & y = -x^2 - x - 4 \end{cases}$$

Anche se si tratta di un'espressione con il valore assoluto (normalmente lunga e difficile da studiare), è facile capire che è una funzione. Infatti le due parabole che la compongono, $y = x^2 + x - 4$ e $y = -x^2 - x - 4$, sono funzioni e quindi anche l'intera equazione è una funzione.

Se si vuole essere sicuri, basta fare il grafico delle due parabole, trovare i due punti angolosi e cancellare le parti delle curve esterne al dominio.



Si ottiene un grafico dove a ogni x è associato un unico y .

STUDIO DEL DOMINIO

Funzioni Polinomiali

1. $y = mx + q$

$$y = 3x + 4 \rightarrow \mathcal{D} \equiv \{\forall x \in \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$
$$m = 3 \text{ e } q = 4$$

m è il coefficiente angolare, perciò l'inclinazione della retta è $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(m)$.
 q è conosciuto come "quota" ed è l'ordinata del punto in cui la $f(x)$ interseca l'asse Y.

2. $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$

$$y = -x^2 + 3 \rightarrow \mathcal{D} \equiv \{\forall x \in \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$
$$a = 1, b = 0, c = 3$$

La $f(x)$ è una parabola con vertice di coordinate $V = (0, 3)$.
La concavità è verso il basso perché $a < 0$.

3. $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \rightarrow \mathcal{D} \equiv \{\forall x \in \mathbb{R}\} \equiv]-\infty, +\infty[$$

Per qualsiasi valore di x finito la y ha un valore finito.

Funzioni Razionali fratte

$$y = \frac{x-1}{x^2-25}$$

$$\mathcal{D} \equiv \{\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 25 \neq 0, x \neq \pm 5\} \equiv]-\infty, -5[\cup]-5, +5[\cup]+5, +\infty[$$

Dal dominio si capisce che nel grafico della $f(x)$ ci sono delle discontinuità nei punti $x = \pm 5$

Funzioni irrazionali fratte

$$y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\mathcal{D} \equiv \{\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0, x < -2 \cup x > +2\} \equiv]-\infty, -2[\cup]+2, +\infty[$$

STUDIO DEL CODOMINIO

Studiare il codominio della funzione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Si trasforma la funzione fino a renderla implicita

$$y = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 \quad \frac{x^2}{2} - 2x + 1 - y = 0 \quad \frac{x^2 - 4x + 2 - 2y}{2} = 0 \cdot 2$$

Fino a giungere ad un'equazione di 2° in x

$$x^2 - 4x + 2 - 2y = 0$$

$$\text{con } a = 1 \quad b = -4 \quad c = 2 - 2y$$

Quindi

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(2 - 2y) = 16 - 8 - 8y = 8 + 8y$$

e le radici sono

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8 + 8y}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8y + 8}}{2}$$

Per avere due radici reali e distinte

$$\Delta = 8y + 8 \geq 0 \text{ e quindi } 8y \geq -8 \text{ ovvero } y \geq -1$$

$$\text{Il codominio è allora } \mathcal{C} \equiv \{\forall y \in \mathbb{R}: y \geq -1\} \equiv [-1, +\infty[$$

STUDIO DELLE INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI

Studiare le intersezioni della funzione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ con gli assi cartesiani.

I punti di intersezione con l'asse X ($y = 0$) sono due: $A \equiv (3.4, 0)$ e $B \equiv (0.6, 0)$.

Si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 2}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

Di cui le soluzioni sono

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm 2.8}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4 + 2.8}{2} = 3.4 \\ x_2 = \frac{4 - 2.8}{2} = 0.6 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse Y ($x = 0$) è $C \equiv (0, 1)$

Si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = (0)^2 - 4(0) + 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

SIMMETRIA

Simmetria rispetto all'asse Y - Funzioni pari

Una funzione è pari quando $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f(x) = f(-x)$

Le funzioni pari sono quindi simmetriche rispetto all'asse Y.

Seguono degli esempi:

Esempio 1 $f(x) = x^2 + 5$

$$f(-x) = (-x)^2 + 5 = x^2 + 5 = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é pari}$$

Esempio 2 $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

$$f(-x) = x\sqrt{(-x)^2 - 1} = -x\sqrt{(-x)^2 - 1} = -x\sqrt{x^2 - 1} \neq x\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow f(x) \text{ non é pari}$$

Esempio 3 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} \rightarrow f(x) \text{ é pari}$$

Simmetrica rispetto all'origine - Funzioni dispari

Un funzione è dispari quando $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

Le funzioni pari sono quindi simmetriche rispetto all'origine.

Seguono degli esempi:

Esempio 1 $f(x) = x^2 + 5$

$$-f(-x) = -((-x)^2 + 5) = -x^2 - 5 \neq x^2 + 5 \rightarrow f(x) \text{ non é dispari}$$

Esempio 2 $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

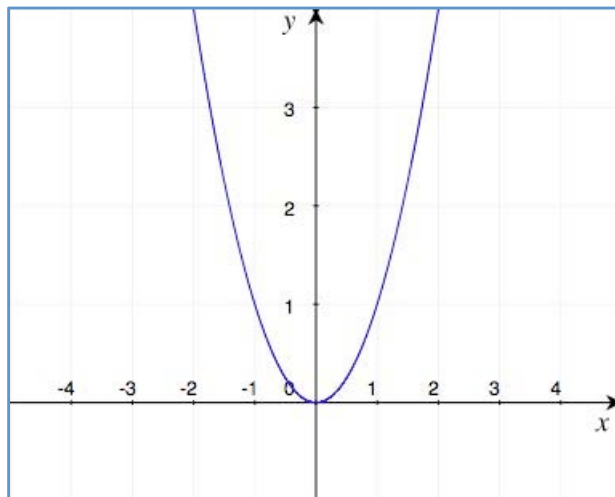
$$-f(-x) = -(-x\sqrt{(-x)^2 - 1}) = -x\sqrt{x^2 - 1} \neq x\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow f(x) \text{ non é dispari}$$

Esempio 3 $f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2}$

$$-f(-x) = -\left(\frac{(-x)^3+5(-x)}{(-x)^2}\right) = \frac{x^3+5x}{x^2} \rightarrow f(x) \text{ é dispari}$$

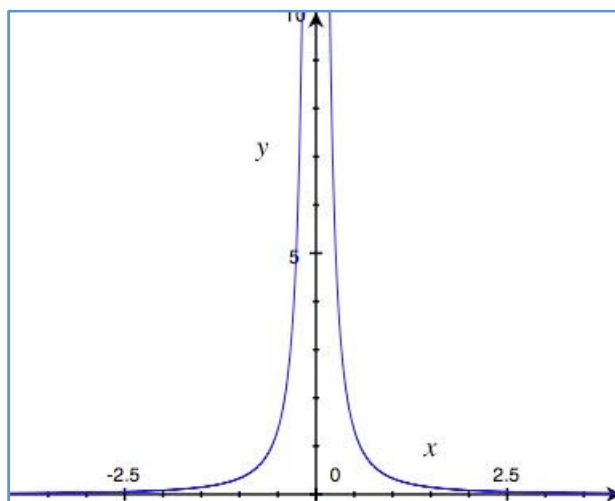
Esempi di funzioni pari

Esempio 1 $y = x^2$



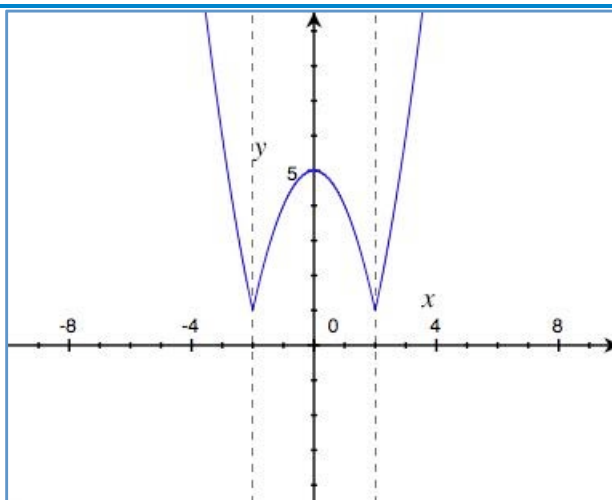
$$f(-x) x^2 = (-x^2) x^2 = x^2 = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é pari}$$

Esempio 2 $y = \frac{1}{3x^2}$



$$f(-x) = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(-x)^2} = \frac{1}{3(x)^2} = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é pari}$$

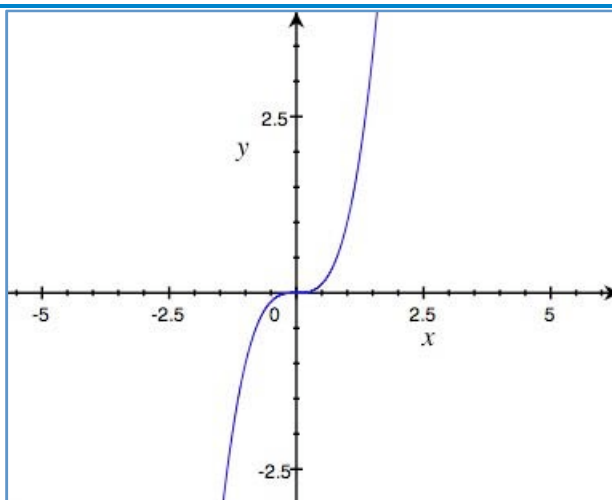
Esempio 3 $y = |x^2 - 4| + 1$



$$f(-x) = |(-x)^2 - 4| + 1 = |x^2 - 4| + 1 = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é pari}$$

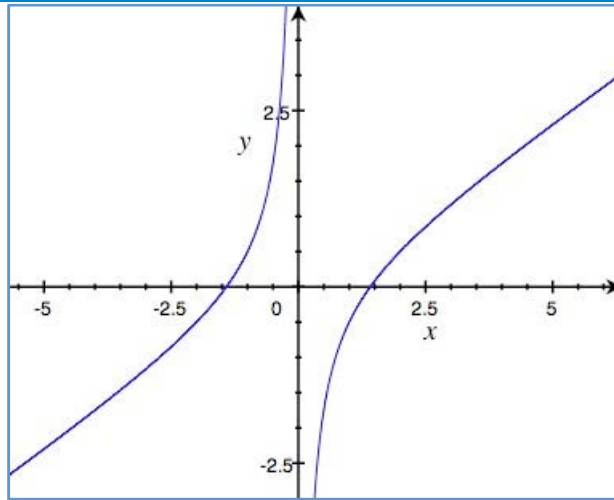
Esempi di funzioni dispari

Esempio 1 $y = x^3$



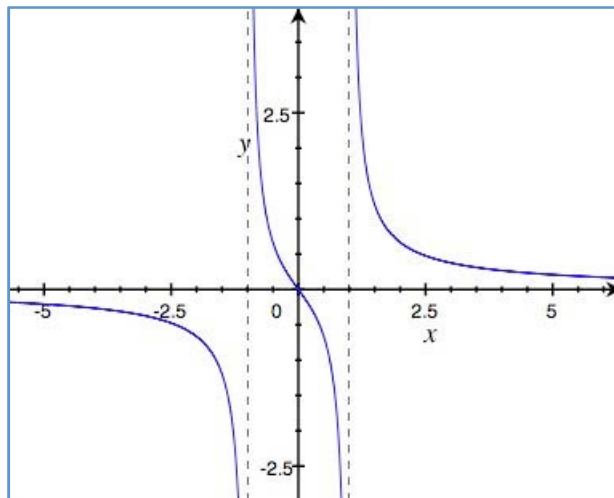
$$-f(-x) = -(-x^3) = x^3 = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é dispari}$$

Esempio 2 $y = \frac{x^2-2}{2x}$



$$-f(-x) = -\left(\frac{(-x)^2-2}{2(-x)}\right) = \frac{x^2-2}{2x} = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é dispari}$$

Esempio 3 $y = \frac{x}{x^2-1}$



$$-f(-x) = -\left(\frac{(-x)}{(-x)^2-1}\right) = \frac{x}{x^2-1} = f(x) \rightarrow f(x) \text{ é dispari}$$