EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Le uguaglianze fra espressioni numeriche si chiamano **equazioni**. Cercare le soluzioni dell'equazione vuol dire cercare quelle combinazioni delle lettere che vi compaiono che la rendono vera.

Le disuguaglianze fra espressioni numeriche sono invece dette **disequazioni** e di nuovo si cercano quei valori delle lettere che rendono vera la disuguaglianza.

L'espressione a sinistra dell'uguale (o del segno di disuguaglianza) è anche detto *primo membro* e quella a destra *secondo membro*.

Sia per le equazioni che per le disequazioni vale il principio che si può aggiungere o sottrarre a entrambi i membri uno stesso termine (anche contenente lettere) che il risultato non cambia.

Regola del trasporto

Da qui deriva la **regola del trasporto** che dice che si può *trasportare* da un membro all'altro ogni termine che si vuole, basta cambiarlo di segno (ciò equivale infatti a sottrarre ad entrambi i membri il dato termine: da una parte quindi si annulla e dall'altra compare col segno cambiato).

Moltiplicazione di entrambi i membri per uno stesso numero

Per le equazioni vale anche la regola che si può moltiplicare o dividere entrambi i membri per uno stesso termine <u>diverso da zero</u> che il risultato non cambia.

Per le disequazioni tale regola vale solo se il termine per cui si moltiplica o divide è strettamente positivo.
Se invece fosse negativo bisogna cambiare verso alla disequazione (da maggiore a minore e viceversa). Per capirne il motivo basta pensare alla semplice disequazione $1 > 0$, che non contiene lettere ed è sempre vera.
Se moltiplichiamo a sinistra e a destra per -1 senza cambiare verso otterremmo $-1 > 0$ che invece è sempre falsa.

L'espressione torna invece sempre vera (quindi la soluzione originale) se cambiamo contemporaneamente il verso: $-1 < 0$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI INTERE

Iniziamo con le equazioni in una variabile, tipicamente indicata con la lettera *x*.

Equazioni intere

Le equazioni in cui *x* compare solo al numeratore sono dette **equazioni intere**.

In pratica, dopo aver portato tutto a primo a membro, avremo quindi un'equazione del tipo $P(x) = 0$ dove P(x) è un polinomio nella variabile *x*.

Equazioni e disequazioni di 1° grado

Se il grado del polinomio è 1 avremo le **equazioni di primo grado**. Per risolverle basta portare a secondo membro il termine di grado zero (cioè il *termine noto*) e dividere poi entrambi i membri per il coefficiente della *x* nel termine di primo grado:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Lo stesso procedimento si applica per le **disequazioni di primo grado**:

$$10 - 5x < 0 \Rightarrow -5x < -10 \Rightarrow x > 2$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo cambiato verso, perchè abbiamo diviso entrambi i membri per un numero negativo.

Si noti come le disequazioni in generale danno come risultato non un numero finito di valori di *x* ma in un intero intervallo, in questo caso gli infiniti valori di *x* maggiori di 2.

Equazioni di 2° grado

Se il grado del polinomio è 2 avremo le **equazioni di secondo grado**. Dopo aver portato tutto a primo membro, esse in genere avranno la forma seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove *a*, *b* e *c* sono tre numeri dati, che dipendono dall'esercizio (non sono variabili). Per risolvere l'equazione calcoliamo il *discriminante*, indicato con la lettera greca Δ (=*delta*):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si può dimostrare che se il delta risulta minore di zero non ci sono soluzioni (reali), mentre invece se è maggiore o uguale a zero ci sono le seguenti soluzioni:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ci sono quindi due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2 nel caso Δ>0, e due soluzioni reali e coincidenti (cioè in pratica una sola soluzione x_0) nel caso Δ=0.

Per risolvere le **disequazioni di secondo grado** consideriamo l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$. che compare a primo membro dopo aver portato tutto a sinistra. A seconda del segno di Δ e del verso della disequazione si presentano i casi seguenti:

<table>
<tr><td rowspan="2">$\Delta < 0$</td><td>$P(x) > 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) < 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $\forall x \in R$</td><td>concordi indeterminata</td></tr>
<tr><td>$P(x) < 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) > 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $\exists x \in R$</td><td>discordi impossibile</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta = 0$</td><td colspan="2">$P(x) > 0 \Rightarrow x \neq x_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P(x) < 0 \Rightarrow \exists x \in R$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P(x) \leq 0 \Rightarrow x = x_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta > 0$
(assumendo
$x_1 < x_2$)</td><td>$P(x) > 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) < 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $x < x_1 \cup x > x_2$</td><td rowspan="2">concordi esterni</td></tr>
<tr><td>$P(x) \geq 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) \leq 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $x \leq x_1 \cup x \geq x_2$</td></tr>
<tr><td>$P(x) < 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) > 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $x_1 < x < x_2$</td><td rowspan="2">discordi interno</td></tr>
<tr><td>$P(x) \leq 0$ e $a > 0$ oppure $P(x) \geq 0$ e $a < 0$ $\Rightarrow$ $x_1 \leq x \leq x_2$</td></tr>
</table>

EQUAZIONI FRATTE

Le equazioni dove la *x* compare (anche) al denominatore sono dette **equazioni fratte**.

La ricerca delle soluzioni prevede una sequenza di passaggi:

- Per primo va discusso il Campo di Esistenza (o di Accettabilità) cioè i valori di *x* accettabili: bisogna porre diverso da zero ogni denominatore che contenga la *x*.
- Poi si risolvono riducendo al minimo comune denominatore e eliminando poi il denominatore (cioè implicitamente moltiplicando entrambi i membri per tale denominatore, supposto diverso da zero).
- Alla fine va discussa l'accettabilità delle soluzioni dell'equazione intera risultante confrontando col C.E. discusso prima.

DISEQUAZIONI FRATTE

Le **disequazioni fratte** sono in generale più complesse. Infatti dopo aver discusso il C.E. e ridotto al minimo comune denominatore, non è lecito eliminare il denominatore, perchè il suo segno dipende dal valore assegnato a *x*.
Quindi, tranne i casi semplici in cui tale segno è sicuro (per esempio è sempre positivo se vale x^2+1), si deve procedere studiando preliminarmente e separatamente il segno del numeratore e del denominatore, dopo aver portato tutto a primo membro in un'unica frazione, ottenendo

$$\frac{N}{D} > 0$$

Per evitare complicazioni si pone sempre per convenzione

$$N>0 \quad \text{e} \quad D>0$$

Risulteranno quindi in generale due disequazioni intere da risolvere, magari di primo o di secondo grado.
Si costruisce poi un ***grafico dei segni*** dove si traccia una linea solida negli intervalli dove il dato termine è positivo ed una linea tratteggiata altrove.
Si segnano con i pallini pieni gli eventuali valori dove il dato termine risulta nullo e con le crocette i valori esclusi dal C.E.

Si legge infine dal grafico gli intervalli dove il rapporto dei segni di N e D dà il segno richiesto:

"+" se si chiedeva $\frac{N}{D} > 0$ "-" se si chiedeva $\frac{N}{D} < 0$

Si escludono dalla soluzione i punti con le crocette.

Si includono nella soluzione i punti con i pallini pieni solo se la disequazione aveva versi del tipo $\leq$ oppure $\geq$.

SISTEMI DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

I **sistemi di equazioni** sono una serie di equazioni per cui cerchiamo i valori delle lettere (*variabili*) che le rendono tutte contemporaneamente vere. Il **grado di un sistema** di equazioni si calcola moltiplicando fra loro i gradi delle singole equazione.

Sistemi di due equazioni in due incognite x e y

I **sistemi di due equazioni in due incognite *x* e *y*** si risolvono, per esempio, col metodo di sostituzione: si risolve una delle due equazioni (una qualunque se il sistema è di primo grado, quella di primo grado fra le due equazioni se il sistema è invece di secondo grado) per una delle due variabili a scelta. Si sostituisce poi tale risultato nell'altra equazione ottenendo un'equazione nella sola altra variabile da risolvere. Ci saranno quindi in generale zero o più (anche infinite) coppie (x,y) che risolvono il sistema.

Sistemi di disequazioni in un'unica incognita x e y

I **sistemi di disequazioni in un'unica incognita** si risolvono risolvendo separatamente le varie disequazioni e disegnando infine un ***grafico delle soluzioni***, dove negli intervalli che risolvono la data disequazione si disegna una linea solida e altrove si lascia vuoto. La soluzione finale del sistema è poi l'intervallo (o intervalli) dove tutte le disequazioni mostrano una linea piena.