GEOMETRIA ANALITICA 1

La geometria analitica si occupa di descrivere certe figure geometriche in maniera *analitica* cioè dando un'equazione che le rappresenti.

PIANO CARTESIANO

Per capire di che equazione si tratti si parte dal concetto di **piano cartesiano**. In un piano (per esempio quello di questo foglio) vengono tracciati due rette perpendicolari, dette *assi cartesiani*. La retta orizzontale è detta *asse delle ascisse* e quella verticale *asse delle ordinate*. Il punto di intersezione dei due assi è detto *origine*. Introdotta *un'unità di misura*, per esempio 1 cm oppure 3 quadretti di un foglio a quadretti, per semplicità uguale per entrambi gli assi (*sistema monometrico*), ogni punto sull'asse delle ascisse viene identificato dalla coordinata x, e ogni punto sull'asse delle ordinate dalla coordinata y, contando le unità di misure a partire dall'origine. Gli assi cartesiani sono quindi assi orientati, e si esplicita questo fatto mettendo una freccia all'estremità destra dell'asse x e all'estremità superiore dell'asse y.

Un generico **punto nel piano** viene identificato con una lettera latina stampatello (A, B.. P, Q etc) e viene quindi univocamente identificato da una **coppia di coordinate *(x,y)*** rappresentanti i valori della x e della y, rispettivamente, ottenuti proiettando il punto sugli assi, cioè tracciando a partire da esso le perpendicolari agli assi cartesiani e andando a leggere quindi le coordinate x e y sugli assi stessi.

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Dati due punti qualunque $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, le coordinate del **punto medio** M del segmento AB si calcolano come segue: $M(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$.

DISTANZA TRA DUE PUNTI DEL PIANO

La **distanza fra i due punti** A e B si calcola invece come segue: $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

RETTA

Le figura geometrica più semplice da cui si parte in geometria analitica à **la retta**. Per distinguere rette diverse nel piano cartesiano ciascuna viene identificata con una lettera latina corsiva minuscola: *r*, *s*, *t*, *u*...

La retta è un concetto primitivo della geometria, cioè non definibile a partire da altri concetti e si danno semmai soltanto dei postulati, o assiomi, che ne descrivano le proprietà: per 2 punti passi una sola retta.

Dare l'equazione della retta, così come di ogni altra *curva* di cui ci si occupa in geometria analitica, vuol dire scrivere un'equazione nelle variabili x e y soddisfatta solo dai punti $P(x; y)$ sulla curva stessa.

Per la retta si può dimostrare che risulta sempre un'**equazione di <u>primo grado</u> in x e y**. Viceversa ogni equazione di primo grado rappresenta una retta nel piano cartesiano, per questo le equazioni di primo grado sono anche dette *lineari*.
L'equazione risultante si può dari in *forma implicita*

$$ax + by + c = 0$$

con a, b e c tre coefficienti numerici che dipendono dalla data retta, oppure in *forma esplicita*

$$y = mx + q \quad \text{(retta non verticale)}$$

$$x = \text{cost} \quad \text{(retta verticale)}$$

Coefficiente angolare

Nella forma esplicita m rappresenta il **coefficiente angolare** della retta, definito come $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, dove A e B sono due generici punti sulla retta. Il motivo di questo nome sta nel fatto che a parità di *incremento* $\Delta x = x_A - x_B$ della variabile *x* (preso in valore assoluto) se si ha un grande incremento $\Delta y = y_A - y_B$ della variabile *y* (anche lui preso in valore assoluto), cioè una retta che forma un grande angolo coll'asse *x*, si avrà un coefficiente angolare *m* più grande (sempre in valore assoluto). In altre parole all'aumentare di *m* in valore assoluto aumenta la pendenza della retta. Il segno di m invece indica se la retta congiunge 1° con 3° quadrante ($m>0$) oppure 2° con 4° ($m<0$). Una retta con $m=0$ è una retta orizzontale. Si noti che questa definizione implica $x_A \neq x_B$, cioè che la retta non sia verticale (parallela quindi all'asse *y*). In questo caso particolare non ha senso parlare di coefficiente angolare (al massimo si dice che *m* tende ad infinito e si scrive $m \to \infty$).

Termine noto

Il termine noto *q* si chiama invece anche **ordinata dell'origine** perchè rappresenta il valore della *y* del punto dove la retta interseca l'asse delle ordinate (basta porre $x=0$ per rendersene conto).

Equazione della retta

Per trovare l'equazione della retta dati due punti A e B sulla retta stessa si può quindi procedere in vari modi. Elenchiamo i principali:

1° metodo:

scegliere di trovare la forma esplicita (in genere più immediata) e imporre il passaggio per A e per B, cioè sostituire al posto di *x* e *y* i valori corrispettivi di A e B, a turno, così che risulta un sistema di due equazioni di primo grado nelle incognite *m* e *q*

2° metodo:

scegliere sempre la forma esplicita ma calcolarsi innanzitutto il coefficiente angolare dalla definizione data sopra e poi imporre il passaggio per A o per B (a scelta) per trovare anche il termine noto *q*

3° metodo:

ricavare direttamente l'equazione dall'espressione detta *formula del passaggio per due punti*

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Rette parallele e perpendicolari

Si può dimostrare che due rette r e s parallele hanno lo stesso coefficiente angolare: $m_r = m_s$

Analogamente, si può dimostrare che **rette perpendicolari** hanno coefficienti angolari che sono l'uno l'anti-reciproco dell'altro: $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

Rette parallele, coincidenti o secanti.

Due rette possono essere parallele, coincidenti o secanti. Per capire qual è il caso si possono controllare i coefficienti angolari: se risultano uguali allora le rette sono parallele o coincidenti.

Più in generale, si può risolvere il sistema formato dalle due equazioni:

- se il sistema ha una soluzione le rette saranno **secanti** e la coppia *(x,y)* soluzione del sistema darà le coordinate del *punto di intersezione*;
- se il sistema è impossibile le rette sono **parallele** e distinte;
- se il sistema è indeterminato (infinite soluzioni) le rette sono **coincidenti**.

Distanza di un punto da una retta

La **distanza di un punto da una retta** si calcola colla seguente formula:

$$\frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove x_P e y_P sono le coordinate del punto e a, b e c sono i coefficienti dell'equazione della retta in forma implicita.