

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Il metodo più semplice per risolvere una disequazione di secondo grado in un'incognita è quella di associarla ad una parabola e risolvere il problema graficamente aggiungendo la variabile y .

Premessa: nel piano cartesiano i punti sono rappresentati da una coppia di numeri (le coordinate), il primo numero della coppia rappresenta l'ascissa, cioè la coordinata sull'asse x , il secondo numero rappresenta l'ordinata, cioè la coordinata sull'asse y .

I punti che hanno **l'ordinata positiva si trovano** nel primo e nel secondo quadrante, ovvero **sopra l'asse delle x** , quelli che hanno **ordinata negativa si trovano** nel terzo e nel quarto quadrante, ovvero **sotto l'asse x** , quelli che hanno l'ordinata nulla appartengono all'asse x

Una disequazione di secondo grado è del tipo $ax^2 + bx + c > 0$ dove al posto del $>$ ci può essere uno degli altri tre simboli di disuguaglianza, con tale metodo la disequazione in questione viene trasformata nel seguente sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

risolvibile graficamente, poiché la prima equazione rappresenta una parabola, la seconda è una disequazione che rappresenta un semipiano: con $y > 0$ ho tutti i punti che stanno sopra l'asse x , con $y \geq 0$ ho tutti i punti che stanno sull'asse x e quelli che ci stanno sopra, con $y < 0$ ho tutti i punti che stanno sotto l'asse x , con $y \leq 0$ ho tutti i punti che stanno sull'asse x e quelli che ci stanno sotto.

Per questo motivo risulta superfluo disegnare l'asse y e il disegno della parabola va fatto unicamente per questo scopo, cioè qual è la sua posizione rispetto all'asse x , quindi non ha importanza trovare esattamente dov'è il vertice, etc., ma le uniche cose importanti sono:

- **vedere il segno di a** per capire se la concavità della parabola è rivolta verso l'alto o verso il basso;
- **calcolare il valore di Δ** per sapere se esistono o meno intersezioni con l'asse x .

infatti quando calcoliamo il Δ , stiamo cercando se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzione, cioè stiamo risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

il che significa che intersechiamo la parabola con l'asse x (la cui equazione è $y = 0$)

Quante possibilità ci sono?

per a ci sono due casi:

1. a è positivo e quindi la concavità della parabola è rivolta verso l'alto,
2. a è negativo e quindi la concavità è rivolta verso il basso

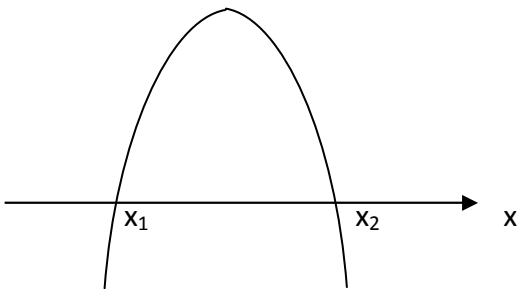
per Δ ci sono tre casi:

1. **è positivo** e quindi ci sono due intersezioni distinte con l'asse x (l'asse è secante)
cerco anche il valore delle due intersezioni x_1 e x_2 .
2. **è nullo** e quindi ci sono due intersezioni coincidenti con l'asse x (l'asse è tangente)
cerco anche il valore del punto di tangenza, che sarà il vertice, e $x_1 = x_2$.
3. **è negativo** e quindi non ci sono intersezioni con l'asse x (l'asse è esterno).

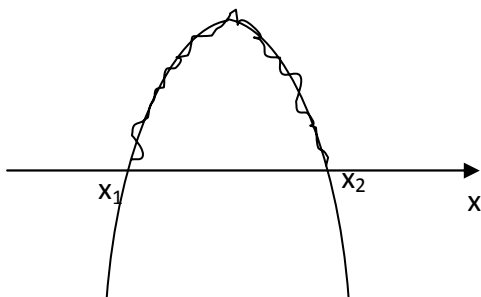
I simboli di disuguaglianza sono quattro, quindi in tutto avremo $2 \times 3 \times 4 = 24$ possibilità di soluzioni di una disequazione di secondo grado, ovviamente non dobbiamo impararli a memoria ma dobbiamo ragionare per capire come posso passare dal disegno (veloce!) della parabola alla scrittura delle soluzioni.

Esempi

Si deve risolvere $ax^2 + bx + c > 0$, e ad esempio a è un valore negativo (bisogna disegnare la parabola rivolta verso il basso e calcolare il $\Delta = b^2 - 4ac$). Si suppone che Δ sia un valore positivo, allora si trovano i valori di x_1 e di x_2 e si fa un disegno veloce della situazione sul piano cartesiano (ma senza disegnare l'asse Y)



poiché la disequazione chiede >0 , bisogna considerare i punti della parabola al di sopra dell'asse x :



I punti sono quelli segnati e corrispondono ai valori di x compresi tra x_1 e x_2 , quindi la soluzione è:

$$x_1 < x < x_2$$

ORA PROVA TU!

Disegna le situazioni corrispondenti a queste disequazioni:

1) $3x^2 + x - 2 > 0$	2) $-2x^2 - 3x + 5 < 0$	3) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$
4) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$	5) $2x^2 + 3x + 5 < 0$	6) $-x^2 + 3x + 5 > 0$
7) $16x^2 - 8x + 1 > 0$	8) $3x^2 + x + 2 \leq 0$	9) $-12x^2 + 3x + 1 < 0$
10) $-x^2 + 2x - 10 \geq 0$	11) $x^2 + 3x - 10 \geq 0$	12) $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$

Controlla poi le soluzioni o scrivile tu e poi chiedi alla prof.ssa:

$x < -1$ o $x > 2/3$	$x < -\frac{5}{2}$ o $x > 1$	
$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$	\emptyset	