DETERMINAZIONE DI UNA FUNZIONE AVENTE CARATTERISTICHE NOTE

Il problema consiste nel trovare una funzione (che non è detto sia l'unica) che risponda a determinate condizioni. Tali condizioni (o caratteristiche) possono essere assegnate per via analitica o per via grafica.
Di seguito sono illustrati due esempi di tale problema, uno per ciascun tipo di condizioni.

Es. 1 Le condizioni sono date per via analitica

La funzione presenta le seguenti caratteristiche analitiche:
a) A.V. : $\boldsymbol{x = 2}$
b) A.Ob. : $\boldsymbol{y = 2x}$
c) $\boldsymbol{f(x)} \cap (\boldsymbol{y = 0}) = (\boldsymbol{4, 0})$
d) $\boldsymbol{f(x)} \cap (\boldsymbol{x = 0}) = (\boldsymbol{0, 3})$
Innanzitutto, data la presenza di asintoti, possiamo escludere che la funzione sia di tipo polinomiale.
Dal fatto che $x = 2$ è un asintoto verticale possiamo dedurre che la nostra funzione abbia per denominatore il fattore $(x - 2)$ o un suo multiplo.
Dal fatto che esiste un asintoto obliquo, dovrà accadere che il grado del numeratore superi di uno il grado del denominatore.
Siccome l'asintoto obliquo deve essere la retta $y = 2x$, allora, se si sceglie $(x - 2)$ come denominatore, il numeratore dev'essere un polinomio di secondo grado ottenuto moltiplicando $(x - 2)(2x)$ ed aggiungendo a questo prodotto un resto che, essendo il denominatore di grado 1, dev'essere necessariamente un numero. Pertanto dovrà aversi:

$$N = 2x(x - 2) + r = -2x^2 - 4x + r$$

Tenuto conto poi che la funzione attraversa l'asse delle X nel punto di ascissa $x = 4$, dovrà aversi:

$$N = 0 \; \rightarrow \; -2x^2 - 4x + r = 0 \; \rightarrow \; -2(4)^2 - 4(4) + r = 0 \; \rightarrow r = -16$$

ottenuto sostituendo $x = 4$.

La funzione così determinata $y = \frac{2x^2 - 4x - 16}{x - 2}$ soddisfa le condizioni a), b), c) non la d) in quanto interseca l'asse delle Y nel punto (0,8) anziché nel punto (0,3).

Modifichiamo allora il denominatore e scegliamo come denominatore il polinomio $(x^3 - 8)$ che ha la caratteristica di essere un polinomio di grado superiore al primo e di annullarsi solo per $x = 2$.
Conseguentemente il numeratore dovrà essere un polinomio di quarto grado avente per termine noto -24 (in modo da soddisfare le condizioni b) e d).
Essendo $y = 2x$ l'asintoto obliquo, il numeratore sarà dato dal prodotto del denominatore per $2x$ più un eventuale resto. Quindi si avrà:

N= $2x(x^3 - 8) + r = 2x^4 - 16x + r$. Deve poi aversi: $2(4^4) - 16(4) + r = 0$ (condizione c)

$$\Rightarrow 512 - 64 + r = 0 \Longrightarrow r = -448$$

Considerando che r dev'essere -24 ,dobbiamo sostituire a -448 un' espressione che tenga conto del fatto che per $x = 4$ questa valga -448.

Siccome $-448 = -424 - 24$ e $-424 = 4(-106)$ l' espressione cercata sarà : $-106x - 24$.
Pertanto da

$$N = 2x^4 - 16x + r$$

ed

$$r = -106x - 24$$

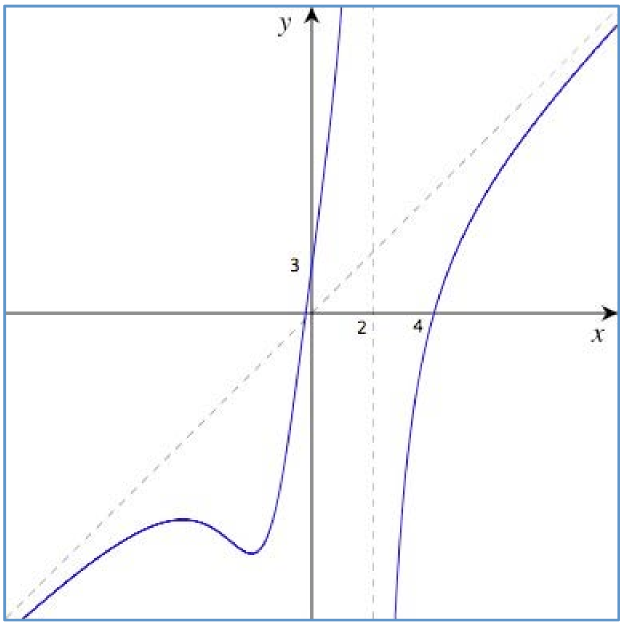
Si ha

$$N = 2x^4 - 16x - 106x - 24 = 2x^4 - 122x - 24$$

La funzione cercata è dunque

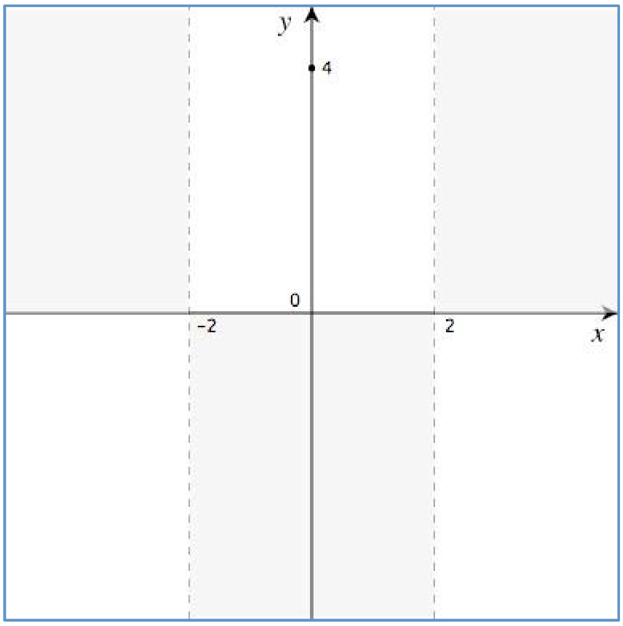
$$y = \frac{2x^4 - 122x - 24}{x^3 - 8}$$

Il grafico della funzione è



Esempio 2 condizioni assegnate per via grafica

In questo esempio i dati sono assegnati per via grafica



Dal segno si deducono le seguenti caratteristiche per la funzione cercata:

- Ci sono due asintoti verticali di equazione $x = 2$ e $x = -2$.
- Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui.
- Si interseca l'asse Y nel punto $A = (0,4)$ ma non interseca l'asse X.
- La funzione è positiva nell'intervallo $x \in \,]-2\,,2[$.
- La funzione è negativa nell'intervallo $x \in \,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[$.

Dato che ci sono punti di discontinuità, si deduce che la funzione non è di tipo polinomiale.
La presenza degli asintoti verticali $x = 2$ e $x = -2$ consiglia di scegliere una funzione razionale fratta, di cui il denominatore è $(x-2)\,(x+2)$ o un suo multiplo.
Data l'assenza di asintoti orizzontali ed obliqui, il numeratore deve avere un grado che supera almeno di 2 quello del denominatore.

Scegliendo come denominatore della funzione il polinomio (x^2-4), dal momento che il punto $A = (0,4)$ è il punto di intersezione con l'asse Y, il termine noto del numeratore deve essere necessariamente *-16*.
Osservando che il segno del denominatore è positivo all'esterno dell'intervallo $x \in \,]-2\,,2[$ e negativo al suo interno e che il segno della funzione è esattamente l'opposto, si trova che il segno del numeratore deve essere sempre negativo.
Ciò si ottiene aggiungendo a *-16* l'opposto di un monomio di grado pari, per esempio $-x^4$, o la somma di monomi di tali caratteristiche.

Tenuto conto di tutte queste considerazioni, una delle possibili funzioni che possiede tutte le caratteristiche richieste è la seguente

$$y = \frac{-x^4-16}{x^2-4}$$

Il grafico della funzione è