GEOMETRIA ANALITICA 2

CONICHE

Dopo le rette, che come abbiamo visto sono rappresentate da equazioni di primo grado nelle variabili x e y (e ogni equazione di primo grado rappresenta una retta), le curve più facili da studiare sono le **coniche**.

La famiglia delle coniche comprende le circonferenze, le ellissi, la parabola e l'iperbole. Come vedremo, analizzandole ad una ad una, sono tutte rappresentate da *equazioni di secondo grado* nelle variabili x e y (e ogni equazione di secondo grado rappresenta una conica).

Le coniche si chiamano così perchè sono quelle curve che si ottengono sezionando un doppio cono infinitamente esteso con un piano, vedi la figura seguente. A seconda dell'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono risulta: una circonferenza se il piano è perpendicolare all'asse, un'ellisse se il piano forma un angolo inferiore a 90° ma superiore ad α (l'*apertura* del cono), una parabola se l'angolo è precisamente uguale ad α e un'iperbole se l'angolo è inferiore ad α (e nel caso speciale di angolo pari a 0°, cioè di piano parallelo all'asse, si forma un'iperbole equilatera).

CIRCONFERENZA

La circonferenza è definita come il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto detto centro. La distanza costante dal centro è detta raggio.

Un punto P appartiene quindi ad una circonferenza di centro C se PC=r equivale al raggio, o anche quindi PC2=r2. Dalla formula per la distanza punto-retta segue quindi che l'equazione di una circonferenza di centro $C(x_C ; y_C)$ e raggio r è la seguente:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

Svolgendo le parentesi e riordinando i termini in ordine decrescente di grado, si arriva alla seguente forma canonica dell'equazione di una circonferenza:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

dove i coefficienti a, b e c sono legati alle coordinate del centro C e al raggio r dalle seguenti formule

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \qquad\qquad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$

Si può dimostrare che vale anche il contrario, cioè che qualunque equazione del tipo

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

rappresenta un'equazione di una circonferenza col centro e il raggio dati dalle formule precedenti, a patto che ovviamente che il raggio esista, cioè che il radicando nella formula per il raggio sia positivo (o al minimo nullo).

Se invece il raggio non esiste (radicando minore di zero) allora la data equazione non sarebbe mai soddisfatta e non rappresenterebbe alcun punto nel piano cartesiano (equazione impossibile).

Chiaramente, visto che c va sottratto a dei termini sicuramente positivi nel radicando, se $c\leq 0$ non ci sono dubbi e abbiamo sicuramente una circonferenza; viceversa, se $c>0$ bisogna fare i calcoli per vedere se il raggio esiste davvero.

Osservando la forma canonica dell'equazione di una circonferenza si nota che essa è un'equazione di secondo grado nelle variabili x e y, nella quale manca il termine misto *xy* (detto anche termine rettangolare) e nella quale i termini di secondo grado risultano entrambi con lo stesso coefficiente. Nella forma canonica questo coefficiente è pari a +1 .

Esempio n.1

Ad esempio se avessimo un'equazione del tipo

$$3x^2+3y^2+6x-9y-12=0$$

basterebbe dividere entrambi i membri per *+3* (cioè il coefficiente comune dei termini di secondo grado) per riportarsi appunto alla forma canonica con coefficiente dei termini di secondo grado pari a *+1*:

$$x^2+y^2+2x-3y-4=0$$

Per verificare se si tratta veramente di una circonferenza o, viceversa, di un'equazione impossibile, basta usare le formule per il centro e per il raggio date prima, ponendo

a=2, *b=-3* e *c=-4*

In questo esempio l'equazione rappresenta davvero una circonferenza con centro $C\left(-1;+\frac{3}{2}\right)$

e raggio $r=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Esempio n.2

Se invece avessimo un'equazione del tipo

$2x^2-5y^2+6x+7y-3=0$

potremmo subito concludere che non si tratta certamente di una circonferenza (vedremo infatti che è un ellisse), perchè i coefficienti dei termini di secondo grado sono diversi e non c'è quindi modo di riportarsi a coefficienti uguali a *+1* per entrambi.

Metodo del completamento dei quadrati

Alternativamente, invece di imparare a memoria le formule per il centro e per il raggio, per verificare se un'equazione di secondo grado in x e y, in cui manca il termine misto xy e in cui i coefficienti dei termini di secondo grado sono uguali, rappresenta veramente una circonferenza, e quindi trovarne centro e raggio, si può applicare il metodo del completamento dei quadrati.

Questo consiste nel cercare di ricondursi all'equazione di una circonferenza di centro e raggio noti, cioè

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

raccogliendo i termini in x separatamente da quelli in y, aggiungendo a primo e secondo membro i numeri opportuni (appunto completando i quadrati), in modo che si riconoscano i quadrati di due binomi del tipo dell'equazione suddetta.

Esempio

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2+2x-4y-2=0 \;\Rightarrow\\
&x^2+2x+....+y^2-4y+....=2\\
&x^2+2x+\boldsymbol{1}+y^2-4y+\boldsymbol{4}=2+\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4} \;\Rightarrow\\
&(x+1)^2+(y-2)^2=7 \;\Rightarrow\\
&\text{circonferenza di centro } (-1;2) \text{ e raggio } \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Retta tangente, secante o esterna ad una circonferenza

Un punto generico P nel piano cartesiano può appartenere ad una data circonferenza, oppure essergli esterno o interno. Basta calcolare la sua distanza PC dal centro C della circonferenza, colla formula della distanza fra due punti, e controllare se PC=r, PC>r oppure PC<r, rispettivamente.

Una retta generica r nel piano cartesiano può essere <u>tangente</u>, <u>esterna</u> o <u>secante</u> ad una data circonferenza. Basta calcolare la distanza d della retta dal centro C della circonferenza, con la formula della distanza punto-retta, e verificare se d=r, d>r oppure d<r, rispettivamente.

Alternativamente, si può risolvere il sistema di secondo grado formato dalle due equazioni (quella della retta e quella della circonferenza) e vedere se/quante soluzioni si hanno. Se ne risultano due coincidenti la retta sarà tangente, se non ce ne sono sarà esterna, se ci sono invece due soluzioni distinte sarà secante.

Retta tangente ad una circonferenza: formula di sdoppiamento

Dato un punto $P(x_P;y_P)$ appartenente ad una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$, si può determinare rapidamente l'equazione della retta tangente alla circonferenza in quel punto colla formula di sdoppiamento (che non dimostriamo qui), cioè operando le seguenti sostituzioni nell'equazione della circonferenza:

$$
\begin{aligned}
&x^2 \to x\cdot x_P\\
&y^2 \to y\cdot y_P\\
&x \to \frac{x+x_P}{2}\\
&y \to \frac{y+y_P}{2}
\end{aligned}
$$

e risulta quindi

$$x \cdot x_P + y \cdot y_P + a \cdot \frac{x + x_P}{2} + b \cdot \frac{y + y_P}{2} + c = 0$$

Tangente ad una circonferenza passante per un punto esterno

Dato un punto $P(x_P; y_P)$ esterno ad una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, si può determinare l'equazione delle due rette tangenti alla circonferenza passanti per P scrivendo innanzitutto l'equazione della generica retta passante per P, cioè

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

e poi mettendo questa a sistema coll'equazione della circonferenza.

Nel sistema di secondo grado che risulta, una volta che ci si riconduce col metodo di sostituzione a dover risolvere un'equazione di secondo grado in una sola variabile (x oppure y a scelta), basterà imporre che risultino due soluzioni distinte, cioè che il discriminante di tale equazione sia uguale a zero (cioè appunto due intersezioni coincidenti della retta con la circonferenza: retta tangente). Tale discriminante dipenderà dal parametro m e dalla risoluzione di tale equazione di secondo grado in m risulteranno quindi due valori m_1 e m_2 corrispondenti alle due rette cercate.

ELISSE

L'ellisse è definita come il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti fuochi, è costante.

Il punto medio C fra i due fuochi è detto centro dell'ellisse, perchè si può dimostrare che è centro di simmetria per l'ellisse (cioè: per ogni punto P sull'ellisse ne esiste un altro P' tale che C è il punto medio del segmento PP').

Si può anche dimostrare che l'ellisse risulta in una figura chiusa, simile ad un ovale (tipo una circonferenza schiacciata/allungata), che contiene al suo interno il centro e i fuochi.

Assi di dell'ellisse

Il segmento che passa per i fuochi e ha estremi su due punti dell'ellisse è detto asse maggiore dell'ellisse. I due estremi si chiamano vertici dell'ellisse. Il nome asse deriva dal fatto che si può dimostrare che l'ellisse è simmetrico rispetto alla retta su cui giace questo segmento (cioè: per ogni punto P sull'ellisse ne esiste un altro P' tale che la retta è asse del segmento PP', cioè lo taglia perpendicolarmente in due parti uguali).

Il segmento perpendicolare all'asse maggiore passante per il centro C è detto asse minore dell'ellisse. Similmente all'asse maggiore, si può dimostrare che anche l'asse minore è asse di simmetria per l'ellisse, da cui il suo nome. Anche per l'asse minore i suoi estremi sono detti vertici dell'ellisse (un'ellisse ha quindi quattro vertici).

Distanza focale

La distanza F_1F_2 fra i due fuochi è detta **distanza focale** e convenzionalmente si pone uguale a $2c$ dove c è quindi un numero positivo pari alla semi-distanza focale.

Ai fini di determinare l'equazione dell'ellisse ci si limita a studiare ellissi *facili* da studiare. Le più facili di tutte sono quelle col centro C posto nell'origine O degli assi cartesiani e con fuochi o sull'asse x (quindi uno a sinistra e uno a destra dell'origine a distanza c entrambi dall'origine) oppure sull'asse y (quindi uno sopra e uno sotto all'origine, a distanza c entrambi dall'origine).
Nel primo caso (fuochi sull'asse x) l'asse maggiore (segmento che giace sull'asse x) si pone convenzionalmente pari a $2a$ e quello minore (segmento che giace sull'asse y) a $2b$. Viceversa (fuochi sull'asse y) l'asse maggiore (sull'asse y) sarà ora pari a $2b$ e quello minore (sull'asse x) a $2a$. In altre parole, a e b sono, per convenzione, due numeri positivi pari al valore dei semi-assi, con *a=semi-asse maggiore* e *b=semi-asse minore* se i fuochi sono sull'asse x, viceversa se sono invece sull'asse y.

Si può dimostrare facilmente (basta considerare uno dei vertici sull'asse maggiore) che la lunghezza dell'asse maggiore ($2a$ se fuochi sull'asse x; $2b$ se fuochi sull'asse y) è anche pari alla somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi, quella che deve essere costante per definizione di ellisse.

Equazione canonica dell'ellisse

Applicando quindi la definizione di ellisse, si trova **l'equazione canonica dell'ellisse con centro nell'origine e fuochi sugli assi cartesiani**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Viceversa, ogni equazione del tipo suddetto rappresenta un'ellisse con centro nell'origine e fuochi sugli assi cartesiani: sull'asse x se $a>b$ (e risulta $c^2=a^2-b^2$) oppure sull'asse y se $b>a$ (e risulta $c^2=b^2-a^2$).

Il caso $a=b$, cioè asse maggiore di lunghezza uguale a quello minore, implica $c=0$, cioè fuochi coincidenti: si tratta di una circonferenza dove gli assi sono pari al diametro. La circonferenza è quindi un caso particolare di ellisse con fuochi coincidenti.

Eccentricità

Si definisce **eccentricità** *e* di un'ellisse il rapporto fra la distanza focale e l'asse maggiore, o anche quindi fra la semi-distanza focale e il semi-asse maggiore. Nel caso di ellisse con fuochi sull'asse x risulta quindi $e=\frac{c}{a}$ mentre se i fuochi sono sull'asse y sarà $e=\frac{c}{b}$.

L'eccentricità è quindi un numero compreso fra 0 e 1 che rappresenta quanto schiacciata è una data ellisse:

- se $e=0$ abbiamo $c=0$, cioè fuochi coincidenti e quindi una circonferenza perfetta senza schiacciamento alcuno;
- aumentando e aumenta quindi il numeratore c e quindi i fuochi si allontanano l'uno dall'altro, aumentando lo schiacciamento/allungamento dell'ovale;
- nel caso estremo $e=1$ abbiamo fuochi agli estremi dell'asse maggiore stesso (cioè coincidenti coi vertici sull'asse maggiore) e quindi $c=a$ (oppure $c=b$) e l'asse minore è quindi diventato pari a 0: l'ellisse si dice degenere e si è ridotta al *segmento* F_1F_2.

Nel caso di ellisse con centro in un punto $C(x_C;y_C)$ qualunque del piano cartesiano, ma con assi paralleli agli assi cartesiani l'equazione canonica dell'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani diventa:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$$

volgendo le parentesi e riordinando in generale risulta un'equazione del tipo:

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma x+\delta y+\varepsilon=0$$

Viceversa, una qualunque equazione del tipo suddetto rappresenta un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani.

Si noti quindi che, per lo meno per le ellissi di questo tipo facile qui studiato, si trova che le ellissi sono rappresentate da equazioni di secondo grado in x e y, mancanti del termine rettangolare xy, e con coefficienti dei termini di secondo grado in generale diversi fra loro (altrimenti potrebbe essere una circonferenza) aventi però lo stesso segno.

Metodo del completamento dei quadrati

Come per la circonferenza anche per l'ellisse si può applicare il metodo del completamento dei quadrati per cercare di ricondursi da una generica equazione di secondo grado senza termine rettangolare xy alla forma canonica suddetta, determinando quindi in tal modo le coordinate dell'eventuale centro e le lunghezze degli assi maggiore e minore.

Posizione di un punto o di una retta rispetto all'ellisse

Come per la circonferenza anche per l'ellisse si può determinare la posizione di un punto o di una retta rispetto ad un ellisse data determinando, rispettivamente, la somma delle distanze del punto dai fuochi e confrontandola colla lunghezza dell'asse maggiore oppure risolvendo il sistema di secondo grado retta/ellisse per determinare se/quante soluzioni distinte si hanno.

Formula di sdoppiamento

Come per la circonferenza anche per l'ellisse si può applicare la formula di sdoppiamento per determinare rapidamente l'equazione della retta tangente ad un ellisse in un suo punto:

$$\alpha \cdot x \cdot x_P + \beta \cdot y \cdot y_P + \gamma \cdot \frac{x + x_P}{2} + \delta \cdot \frac{y + y_P}{2} + \varepsilon = 0$$

Oppure, anche se in generale ora i calcoli diventano molto complessi, si può risolvere il sistema fra l'equazione di una retta generica per un punto dato *P* (esterno alla circonferenza) e l'equazione di un'ellisse, imponendo che il discriminante dell'equazione di secondo grado in una variabile che ne risulta sia pari a zero per determinare infine i coefficienti angolari m1 e m2 delle due rette tangenti all'ellisse passanti per il dato punto.