CALCOLO COMBINATORIO

Il **calcolo combinatorio** si occupa del problema di contare il modo di disporre in fila *n* elementi (che possono essere numeri, lettere, facce di un dado o di una moneta, quadri di pittori diversi in un'esposizione, etc).

OPERAZIONE DI FATTORIALE

Nel seguito ci sarà utile l'operazione ***fattoriale*** che agisce su un numero naturale qualunque *n* e produce un nuovo numero naturale indicato con *n!* che risulta dal prodotto di *n* per tutti i naturali che lo precedono:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Come primo esempio di disposizione in fila consideriamo le vocali dell'alfabeto italiano: A, E, I, O e U. Potremmo chiederci quante file di tre lettere possiamo fare scegliendo tre vocali a caso dal gruppo.

Disposizioni semplici

Se una volta scelta una vocale non può essere scelta di nuovo, allora questo è un esempio di quelle che si chiamano **disposizioni semplici** di n elementi di classe k, e il numero di file che si possono formare in questo modo si scrive $D_{n,k}$.

In questo esempio *n=5* (le cinque vocali) e *k=3* (le tre che scegliamo per formare una fila). Elenchiamo alcune file: AEI, AEO, AOU, EIO, IOU etc.
Per capire quante sono le disposizione semplici possibili iniziamo notando che al primo posto nella fila abbiamo libera scelta fra le 5 vocali, quindi 5 scelte possibili. Al secondo posto poi rimangono ora 4 vocali fra cui scegliere, e quindi siamo già a 5x4 = 20 coppie di vocali possibili. Al terzo posto, infine, rimangono 3 vocali fra cui scegliere quindi siamo arrivati al risultato finale che è

$$D_{5,3} = 5x4x3 = 60$$

E' importante sottolineare che con questo ragionamento abbiamo considerate diverse – e quindi contato due volte – la fila AEI e la fila EIA, per esempio, cioè in generale abbiamo considerato diversa ogni fila che contenga anche magari le stesse tre lettere ma in ordine diverso. Generalizzando questo esempio si trova che:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

disposizioni con ripetizione

Se invece nella scelta delle tre vocali ammettiamo che la lettera A, per esempio, si possa anche ripetere - cioè contiamo anche file del tipo AAE, AEA, AAA etc – allora abbiamo un esempio di **disposizione con ripetizione**, $D'_{n,k}$, in questo caso di 5 elementi sempre di classe 3, ma con uno che si può ripetere. Chiaramente in questo caso risultano molte più file possibili. In pratica per ogni posto nella fila abbiamo ora tutte e 5 le scelte possibili (una lettera già scelta può essere scelta di nuovo), per un totale di 5x5x5=125 disposizioni.

In generale:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Nel caso delle disposizioni con ripetizione, a differenza di quelle semplici, la classe *k* può anche essere maggiore del numero di elementi *n*. Ad esempio se con le 5 vocali suddette volessimo formare sequenze di 8 lettere: chiaramente in questo caso alcune lettere dovranno senz'altro ripetersi (altrimenti la sequenza massima sarebbe di 5 lettere) e se ammettiamo che una certa vocale si possa ripetere anche tutte e 8 le volte abbiamo $D'_{5,8} = 5^8$. Come altro esempio, si considerino le possibili sequenze di risultati in 13 partite del campionato di calcio. Segnando *1* quando vince la squadra di casa, *2* quando vince la squadra in trasferta e *X* in caso di pareggio, ci saranno 3^{13} possibili sequenze di risultati possibili.